



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش کنترل

عنوان:

طراحی بهینه کنترل کننده برای سیستمهای غیرخطی  
مستوی

نگارش:

پیمان مهاجرین اصفهانی

استاد راهنما:

دکتر مسعود کریمی

آذر ۱۳۸۶

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که هر چه دارم از آنهاست...

## تقدیر و تشکر

در اینجا بر خود لازم میدانم از اساتید محترمی که در طی این مسیر مرا کمک و راهنمایی نمودند، قدردانی و تشکر نمایم. از جناب آقای دکتر ساداتی که مبانی کنترل بهینه را به من آموزش داده‌اند، از جناب آقای دکتر نامور که در زمینه‌های مختلف علمی در حل مشکلات اینجانب دلسوزانه کمکهای مؤثری نموده‌اند، از جناب آقای دکتر فرجامی که صبورانه در مسائل دشوار ریاضی موانع زیادی را برای اینجانب مرتفع ساختند و از استاد محترم آقای دکتر مروستی که لطف نموده در جلسه دفاعیه اینجانب حضور داشتند و با پیشنهادات سازنده، اینجانب را در تکمیل این پروژه یاری نمودند، کمال تشکر را داشته و زندگی شاد و سلامتی را برای ایشان آرزومندم.

و از جناب آقای دکتر کریمی که برای من همواره همچون برادری بزرگتر و مهربان بودند و هیچ‌گاه صفا و محبت خود را از من دریغ نکردند، به پاس زحمات بی‌دریغ و بدون وقفه ایشان از آغاز آشنایی تا به امروز، به ویژه در به پایان رسانیدن این پایان‌نامه قدردانی کرده و برای ایشان آینده‌ای درخشان و مملو از موفقیت‌های بی‌پایان را از خداوند منان خواستارم.

همچنین از دوستان عزیزم آرش امینی، حسام زندی، صالح تواضعی و مهدی رحمانی که در تهیه و ارائه این پروژه مرا یاری نموده‌اند و از فرزانه که در طی تمامی این مراحل صمیمانه در کنار من بوده است قدردانی و تشکر میکنم.

این پروژه تحت قرارداد پژوهشی شماره ۵۰۰/۱۱۶۲۹/ت مورخ ۸۶/۸/۶ از حمایت و پشتیبانی مالی و معنوی

مرکز تحقیقات مخابرات ایران بهره‌مند شده است.

## چکیده

طراحی یکی از مهمترین قسمتهای کنترل است. خواسته های متفاوت از کنترل کننده به طراحی های متفاوتی منجر میشود. یکی از معیارهای طراحی بهینه سازی است. در این پروژه قصد داریم که با کمک گیری از معیارهای بهینه سازی طراحی مناسبی به ویژه در سیستمهای غیرخطی مستوی ارائه دهیم. در کنترل سیستمهای غیرخطی معمولاً یک جواب یکتا نداریم و ما قصد داریم که در میان فضای جوابهای موجود با تعریف معیار بهینه سازی مناسب، طراحی با کارایی بهتر ارائه دهیم. در این پروژه ابتدا مسئله بهینه سازی را در قالب یک تابع هزینه مناسب، که جنبه های مختلف طراحی در کنترل از جمله بهینه کردن انرژی ورودی سیستم، رفتار مناسب حالتها و خروجی سیستم را در بر دارد، تعریف میکنیم. در مرحله بعدی کنترل کننده مناسب مربوط به این مسئله بهینه سازی را در سیستمهای خطی و سیستمهای غیرخطی مستوی به صورت حلقه باز طراحی میکنیم و روش تحلیلی و عددی مناسب برای رسیدن به جواب نهایی را مورد بررسی قرار می دهیم.

همان گونه که میدانیم طراحی حلقه بسته یکی از مهمترین و کاربردی ترین قسمتهای کنترل است که از نظر پیاده سازی نسبت به روش حلقه باز ارجحیت بالایی دارد. در ادامه ابتدا مقدمه ای درباره بعضی از روشهای کنترل سیستمهای غیرخطی بیان میکنیم و سپس کاربردها و تواناییهای آنها در زمینه های مختلف مورد بررسی قرار میدهیم. از جمله این روشهای کنترل در سیستمهای غیرخطی میتوان به خطی سازی فیدبک اشاره کرد. در مراجع موجود نسبت به این روش توجه کمی از دیدگاه بهینه سازی صورت گرفته است. یکی از اهدافمان در این پروژه این است که روش خطی سازی فیدبک را با توجه به این دیدگاه تعمیم دهیم و در میان مجموعه جوابهای گوناگونی که در طراحی خطی سازی فیدبک ارائه میشود جواب بهینه را با توجه به معیار مناسبی بدست آوریم. در انتها نیز الگوریتم پیشنهادی را برای روش کنترلی مد لغزشی مطرح میکنیم و با تعریف تابع هزینه ای مناسب به رفتار مناسبی از سیستم که انتظار داریم، میرسیم. در انتها نیز روش پیشنهادی را برای یک سیستم فیزیکی، رباتی با دو بازوی متحرک، پیاده سازی نموده تا کاربردی بودن این روش بهتر توصیف گردد.

## واژه های کلیدی

بهینه سازی، کنترل غیرخطی، خطی سازی فیدبک، کنترل مد لغزشی

صفحه	فهرست مطالب
۱	۱- مقدمه
۵	۲- مقدمه ای بر کنترل بهینه
۶	۱-۲- حساب تغییرات (Calculus of Variations)
۷	۱-۲-۱- مسئله حساب تغییرات با نقاط پایانی ثابت
۸	۱-۲-۲- شرط لازم اویلر- لاگرانژ
۹	۱-۲-۳- مسئله حساب تغییرات با نقاط پایانی متغیر
۱۰	۱-۲-۴- نتایج در حالت چند بعدی
۱۱	۲-۲- تابع همیلتونین
۱۲	۲-۲-۱- فرم همیلتونین معادلات اویلر- لاگرانژ
۱۳	۲-۳- کنترل بهینه
۱۴	۲-۳-۱- تعریف مسئله کنترل بهینه
۱۵	۲-۳-۲- تعمیم حساب تغییرات به مسائل کنترل بهینه
۱۸	۳- طراحی کنترل بهینه حلقه باز برای سیستمهای خطی و غیرخطی مستوی
۱۹	۳-۱- مسئله کنترل حلقه باز
۲۱	۳-۲- مقدمه ای بر روش شلیک تعمیم داده شده
۲۱	۳-۲-۱- روش نیوتن
۲۴	۳-۳- کنترل بهینه سیستم های خطی
۲۷	۳-۳-۱- مثال عددی و شبیه سازی
۲۹	۳-۴- کنترل بهینه سیستم های غیرخطی مستوی
۲۹	۳-۴-۱- مثال عددی و شبیه سازی
۳۳	۴- طراحی کنترل بهینه در روش خطی سازی فیدبک
۳۴	۴-۱- مسئله کنترل حلقه بسته
۳۵	۴-۲- خطی سازی ورودی-حالت
۳۶	۴-۲-۱- تعاریفی از هندسه دیفرانسیل
۴۰	۴-۲-۲- قضیه خطی سازی فیدبک

۴۰	۴-۲-۳- روند انجام خطی سازی ورودی-حالت
۴۲	۴-۳- الگوریتم بهینه سازی
۴۵	۴-۳-۱- روند مرحله به مرحله الگوریتم بهینه سازی خطی سازی ورودی-حالت
۴۶	۴-۳-۲- مثال عددی و شبیه سازی
۵۰	۴-۳-۳- وابستگی به مقدار اولیه سیستم
۵۴	۴-۴- مقایسه با الگوریتمهای عددی
۵۴	۴-۴-۱- PSO
۵۵	۴-۴-۲- روش بهینه سازی
۵۶	۴-۴-۳- انتخاب وزن اینرسی $w$
۵۷	۴-۴-۴- تعیین پارامترها
۵۸	۴-۴-۵- استفاده از تابع هزینه های مختلف برای رفتارهای گوناگون
۶۰	۴-۵- خطی سازی ورودی-خروجی
۶۵	۴-۵-۱- روند مرحله به مرحله الگوریتم بهینه سازی خطی سازی ورودی-خروجی
۶۶	۴-۵-۲- مثال عددی و شبیه سازی
۷۳	۵- طراحی کنترل بهینه در روش کنترلی مد لغزشی
۷۴	۵-۱- صفحه لغزشی
۷۸	۵-۲- مقدمه ای برای مدل سازی روبات
۸۰	۵-۲-۱- دینامیک روبات
۸۰	۵-۳- طراحی کنترل کننده اسلوتاین (Slotine)
۸۲	۵-۴- مسئله کنترل بهینه
۸۳	۵-۴-۱- مثال عددی و شبیه سازی
۸۶	۶- نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات
۸۷	۶-۱- نتیجه گیری
۸۷	۶-۲- پیشنهادات
۸۸	مراجع و منابع

صفحه	فهرست اشکال
۷	شکل (۲-۱): مسیر بهینه با شرایط اوایه و انتهایی ثابت
۹	شکل (۲-۲): مسیر بهینه با نقطه ابتدایی ثابت و انتهایی آزاد
۱۳	شکل (۲-۳): مسیر حالت پیوسته تحت ورودی کنترلی تکه‌ای پیوسته
۱۴	شکل (۲-۴): مسیر بهینه با نقطه انتهایی متغیر بر روی رویه $S$
۱۹	شکل (۳-۱): مسیرهای ممکن برای رسیدن از $x_0$ به $x_r$
۲۲	شکل (۳-۲): نحوه بهبود $\alpha_i$ در روش نیوتن با توجه به اطلاعات موجود در شرایط نهایی
۲۷	شکل (۳-۳): نمودار حالت‌های سیستم برای دو مقدار مختلف $\psi(0)$ ، (a) مقدار دلخواه برای $\psi(0)$ ، (b) مقدار بهبود یافته برای $\psi(0)$
۲۸	شکل (۳-۴): ورودی کنترل بهینه محاسبه شده برای سیستم خطی
۲۸	(۳-۵): بازوی قابل انعطاف
۳۱	شکل (۳-۶): $x(t)$ در بازه $0 < t < 3$
۳۲	شکل (۳-۷): گشتاور ورودی بهینه.
۳۴	شکل (۴-۱): نمودار انتقال سیستم از شرایط اولیه دلخواه به مبدأ
۳۷	شکل (۴-۲): مسیر حرکت $x(t)$ وقتی $g_2, g_1$ ثابت باشند
۳۷	شکل (۴-۳): سوی تغییرات $x(t)$ در حالت کلی
۴۱	شکل (۴-۴): نمودار جعبه‌ای سیستم کنترل حلقه بسته در خطی‌سازی ورودی-حالت
۴۸	شکل (۴-۵): تغییرات تابع هزینه $J$ و اندازه‌گیری بردار گرادیان آن
۴۹	شکل (۴-۶): نمودار پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با (a) کنترل کننده پیشنهادی و (b) کنترل کننده LQR
۵۰	شکل (۴-۷): نمودار سیگنال کنترلی بهینه به (a) روش پیشنهادی و (b) روش LQR
۵۱	شکل (۴-۸): نمودار تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات درایه اول مقدار اولیه در روش (a) LQR، (b) روش پیشنهادی در دو حالت نامی و بهینه در هر نقطه، (c) درصد اختلاف بین دو نمودار نامی و بهینه نسبت به مقدار بهینه: $\frac{J_{nom} - J_{opt}}{J_{opt}}$
۵۲	شکل (۴-۹): نمودار تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات درایه دوم مقدار اولیه در روش (a) LQR، (b) روش پیشنهادی در دو حالت نامی و بهینه در هر نقطه، (c) درصد

	اختلاف بین دو نمودار نامی و بهینه نسبت به مقدار بهینه: $\frac{J_{nom} - J_{opt}}{J_{opt}}$
۵۳	شکل (۴-۱۰): نمودار تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات درایه سوم مقدار اولیه در روش (a) LQR، (b) روش پیشنهادی در دو حالت نامی و بهینه در هر نقطه، (c) درصد اختلاف بین دو نمودار نامی و بهینه نسبت به مقدار بهینه: $\frac{J_{nom} - J_{opt}}{J_{opt}}$
۵۳	شکل (۴-۱۱): نمودار تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات درایه چهارم مقدار اولیه در روش (a) LQR، (b) روش پیشنهادی در دو حالت نامی و بهینه در هر نقطه، (c) درصد اختلاف بین دو نمودار نامی و بهینه نسبت به مقدار بهینه: $\frac{J_{nom} - J_{opt}}{J_{opt}}$
۵۴	شکل (۴-۱۲) دیاگرام برداری معادلات (۴-۴۴) و (۴-۴۵) در حالت دو بعدی
۵۶	شکل (۴-۱۳) فلوچارت مربوط به روش بهینه سازی PSO
۵۹	شکل (۴-۱۴): مقایسه سیگنال کنترلی روش بهینه-سازی (PSO) با روش پیشنهادی هنگامی که خواستار ترم غیر هموار در تابع هزینه هستیم
۶۰	شکل (۴-۱۵): مقایسه سیگنال کنترلی روش بهینه-سازی روش پیشنهادی برای توابع هزینه متفاوت
۶۴	شکل (۴-۱۶): نمودار جعبه‌ای سیستم کنترل حلقه بسته در خطی سازی ورودی-خروجی
۶۶	شکل (۴-۱۷): هلیکوپتر آزمایشگاهی (Laboratory Helicopter)
۷۰	شکل (۴-۱۸): تغییرات تابع هزینه $J$ و اندازه گیری بردار گرادیان آن
۷۱	شکل (۴-۱۹): نمودار پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با (a) کنترل کننده پیشنهادی و (b) کنترل کننده LQR
۷۲	شکل (۴-۲۰): نمودار سیگنال کنترلی بهینه به (a) روش پیشنهادی و (b) روش LQR
۷۶	شکل (۵-۱): نمودار بلوکی محاسبه $\tilde{x}$
۷۷	شکل (۵-۳): شرط لغزش
۷۸	شکل (۵-۴): توصیف نموداری روابط (۵-۴) و (۵-۱۳)
۸۰	شکل (۵-۵): فیلتر اکیداً سره $G(s)$
۸۱	شکل (۵-۶): فیلتر اکیداً سره توصیف کننده رابطه از $s$ به $\tilde{q}$
۸۳	شکل (۵-۷): روبات با دو بازو (Two-link Robot)



۸۵	شکل (۵-۸): (a) نمودار پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته، (b) نمودار سیگنال کنترلی، (c) نمودار مشتق سیگنال کنترلی برای ضریب دلخواه
۸۵	شکل (۵-۹): (a) نمودار پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته، (b) نمودار سیگنال کنترلی، (c) نمودار مشتق سیگنال کنترلی برای ضریب بهینه

# فصل اول

## مقدمه

روش خطی‌سازی فیدبک یکی از روشهای موثر در کنترل سیستمهای غیرخطی است. مسئله خطی‌سازی کامل فیدبک حالت (Exact Feedback Linearization) برای اولین بار و بطور کامل در [۱ و ۲ و ۳ و ۴] حل گشت. شرط لازم و کافی برای خطی‌سازی کامل فیدبک برای دسته بزرگی از سیستمهای مستوی (Input Affine) در [۶ و ۵] بیان گشت. برای گسترش دامنه گروهی از سیستمهای غیرخطی که از دید هندسه دیفرانسیل (Differential Geometric) قابل کنترل بودند، مسئله خطی‌سازی فیدبک پویا (Dynamic Feedback Linearization) در [۷] مطرح شده و آن با معرفی جبران‌کننده‌های پویا و جستجو در فضای حالت افزون شده (Augmented) مورد بحث قرار می‌گیرد. شرط کافی برای خطی‌سازی فیدبک پویا در [۸] داده شد و شرط لازم آن در [۹] برای اولین بار مطرح گردید. مسئله خطی‌سازی فیدبک پاره‌ای (Partial Feedback Linearization) نیز در [۱۰ و ۱۱] فرمول بندی شده و بزرگترین زیرسیستم قابل خطی‌سازی فیدبک شناسایی شد و شرایط انتقال آن از فضای غیرخطی به فضای خطی مطالعه گشت. وقتی درجه نسبی (Relative Degree) در سیستمی کمتر از بعد آن باشد، خطی‌سازی فیدبک سیستم غیرخطی را به دو قسمت که یکی قسمت خطی و کنترل‌پذیر (Controllable) است و دیگری که به آن دینامیک صفر (Zero Dynamic) می‌گویند، تقسیم می‌کند. به این تقسیم بندی در اصطلاح فرم نرمال (Normal Form) گفته میشود. این مبحث در [۵] مطرح شد. تفاوت اصلی ما بین سیستمهای قابل خطی‌سازی فیدبک پاره‌ای و فرم نرمال در این است که قسمت غیرخطی در فرم نرمال که همان دینامیک صفر است، تنها شامل متغیرهای سیستم است در حالی که در سیستمهای قابل خطی‌سازی فیدبک پاره‌ای قسمت غیرخطی شامل ورودی کنترلی نیز می‌شود. در سالهای اخیر مسئله جدیدی به نام خطی‌سازی فیدبک نامنظم (Nonregular Feedback Linearization) مطرح گشت و مطالعاتی نیز روی آن صورت گرفت [۱۲] که هدف آن انتقال سیستم غیرخطی به سیستم خطی کنترل‌پذیر با ورودی کنترلی با مرتبه‌ای کمتر از ورود کنترلی ابتدایی (Reduced Control Input Dimension) است.

روش خطی‌سازی فیدبک سیستم غیرخطی اولیه را به سیستمی خطی انتقال میدهد. طراحی یک کنترل‌کننده پایدار در این سیستم خطی پایداری را در سیستم غیرخطی اولیه تضمین میکند. اما نکته مهم این است که عملکرد و رفتار مناسب داشتن در سیستم خطی نمی‌تواند عملکرد و رفتار مناسب را در سیستم غیرخطی اولیه نتیجه دهد. به بیان دیگر یک طراحی بهینه برای سیستمهای خطی، بطور مثال (Linear Quadratic Regulator)، نمیتواند بهینه بودن رفتار را در مورد سیستم غیرخطی نتیجه دهد. در این پروژه یکی از اهداف، طراحی فیدبک حالت بهینه برای یک سیستم غیرخطی قابل خطی‌سازی فیدبک، برای رسیدن به رفتار و عملکردی بهینه در فضای غیر خطی ابتدایی است. آنچه که در این پروژه به عنوان معیاری مناسب برای رفتار

و عملکرد بهینه تعریف میشود تابع هزینه‌ای است که مینیمم‌سازی کمینه گردد. در همین راستا میتوان با تعریف توابع هزینه مختلف عملکردهای متفاوتی را پیاده‌سازی نمود.

روش پیشنهادی در قسمت قبلی تنها محدود به خطی‌سازی ورودی-حالت نخواهد بود بلکه میتوان آن را برای روش خطی‌سازی ورودی-خروجی نیز با اندکی تغییر تعمیم داد. یکی از محدودیتهای خطی‌سازی ورودی-خروجی همان دینامیک صفر سیستم است. بر روی خطی‌سازی ورودی-خروجی سیستمهای غیر کمینه فاز (Nonminimum-Phase) که دینامیک صفر ناپایدار دارد مطالعات زیادی انجام شده است. بطور مثال در [۱۳] مسئله استفاده از خروجی معادل (Equivalent Output) مورد بررسی قرار گرفت. در [۱۴] موضوع کنترل متناسب (Coordinate Control) و در [۱۵] و [۱۶] موضوع طراحی کنترل بوسیله معکوس کردن قسمت کمینه فاز سیستم و در [۱۷] و [۱۸] مسئله تقریب خطی‌سازی ورودی-خروجی مطالعه گشت. در ادامه روش ارائه شده را با یکی از معروفترین و قویترین الگوریتمهای عددی بهینه‌سازی، PSO، مقایسه میکنیم. روش PSO برای نخستین بار در [۱۹] در سال ۱۹۹۵ بیان شد. این روش از روی حرکت گروهی دسته ماهی‌ها و پرندگان الهام گرفته شده است. در واقع در کوچ پرندگان برای یافتن غذا، پرنده‌ای که دارای تجربه بیشتری می‌باشد در جلوی گروه شروع به پرواز می‌کند و بقیه نیز پشت سر او پرواز می‌کنند و به این ترتیب بقیه از تجربه او استفاده می‌کنند. مطلبی که در مورد کوچ پرندگان جالب می‌باشد این است که اگر پرنده‌ای احساس کند که دارای تجربه بیشتری از پرنده جلویی خود می‌باشد دو پرنده جای خود را عوض می‌کنند و پرنده با تجربه بیشتر در جلوی گروه قرار می‌گیرد و به این ترتیب همه پرندگان از تجربه همدیگر استفاده می‌کنند و به سمت محل مناسب برای کوچ حرکت می‌کنند. ایده‌ای که در روش بهینه‌سازی PSO استفاده شده است از این رفتار پرندگان الهام گرفته شده است. در واقع می‌توان گفت که واکنش‌های گروهی، قابلیت حل مسائل بهینه را دارند. در مورد حرکت گروهی ماهی‌ها نیز وضعیت به همین منوال می‌باشد. این روش در حالتی که روشهای تحلیلی جوابگو نیستند، بطور مثال برای سیستمهای خطی اما با توان کسری در حوزه لاپلاس، کاربرد مؤثری دارد [۳۴].

یکی دیگر از مسائل دشوار مطرح شده در کنترل مسئله عدم توانایی در مدل کردن سیستمها است. عدم دقت در مدل کردن سیستمهای فیزیکی به ویژه سیستمهای غیرخطی یکی از مشکلات تأثیرگذار در کنترل آنها بوده است. به همین منظور هر طراحی در زمینه کنترل در عمل می‌بایست این عدم دقت را در نظر داشته باشد. کنترل مقاوم (Robust) یکی از مفاهیم کنترل است که به این موضوع می‌پردازد. به طور کلی در کنترل مقاوم سیستم از یک قسمت نامی تشکیل شده است و قسمت دیگر آن ترمی است که نامعینی را توصیف میکند. یکی از روشهای کنترل غیرخطی که براحتی توانایی در بر گرفتن مفهوم کنترل مقاوم را دارد روش کنترل

مدلغزشی (Sliding-Mode) است. در این قسمت ابتدا برای توصیف کنترل مد لغزشی مفاهیم ابتدایی آن برای یک سیستم درجه ۱ مطرح میشود. سپس آن را برای یک سیستم غیرخطی که سیستم فیزیکی یک روبات را توصیف میکند تعمیم میدهیم و در ادامه در جهت طراحی کنترل کننده‌ای بهینه نسبت به تابع هزینه تعریف شده روش پیشنهادی خود را ارائه میکنیم. در انتها نیز توانایی این روش را با شبیه‌سازی آن نشان میدهیم.

## فصل دوم

### مقدمه ای بر کنترل بهینه

در این فصل ابتدا به مقدمه‌ای در زمینه حساب تغییرات پرداخته میشود و روابط آن در دو حالت مختلف نقاط پایانی ثابت و متغیر بیان شده و از حالت تک بعدی به حالت چند بعدی تعمیم داده می‌شود. در ادامه پس از تعریف تابع همیلتونین و بیان معادلات و ارتباط آن با معادله اوایلر-لاگرانژ مسئله کنترل بهینه بیان میگردد. و در انتها حل این در قالب تابع همیلتونین نشان داده میشود.

## ۲-۱- حساب تغییرات (Calculus of Variations)

یک تابعک (Functional) بصورت زیر مفروض است:

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (2-1)$$

هدف یافتن تابع  $x^*(t)$  در بازه زمانی  $[t_0, t_1]$  به گونه ای که تابع  $J(x(t))$  کمینه شود. برای این منظور ابتدا یک سری مبانی اولیه از حساب تغییرات مورد نیاز است.

### تعریف

فرض کنید  $\delta x$  مشخص کننده تغییرات خطی (Variations) تابع  $x$  باشد و همچنین  $x$  و  $x + \delta x$  توابعی باشند که تابعک  $J$  به ازای آنها مشخص باشند در این صورت افزایش تابع هزینه  $J$  به صورت زیر تعریف میشود:

$$\Delta J = J(x + \delta x) - J(x) = \Delta J(x + \delta x) \quad (2-2)$$

### تعریف

تغییرات خطی (Variations) تابعک  $J$  که به صورت  $\delta J$  فرض میشود قسمت خطی  $\Delta J$  نسبت به  $\delta x$  خواهد بود. حال چنانچه فرض کنیم  $\Delta J$  به صورت  $\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \|\delta x\|$  باشد در این صورت اگر حد تابع  $g(x, \delta x)$  به سمت صفر میل کند در آن صورت  $\Delta J$  همان تغییرات خطی  $\delta J$  روی  $x$  خواهد بود.

### تعریف

- چنانچه

$$\begin{aligned} \Delta J = J(x) - J(x^*) &\geq 0 \\ \|x - x^*\| < \varepsilon, \text{ for } \varepsilon > 0 \end{aligned} \quad (2-3)$$

در این صورت به  $J(x^*)$  مینیمم نسبی یا محلی (Relative or Local Minimum) گفته میشود.

- چنانچه

$$\begin{aligned} \Delta J = J(x) - J(x^*) &\leq 0 \\ \|x - x^*\| < \varepsilon, \text{ for } \varepsilon > 0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

در این صورت به  $J(x^*)$  ماکزیمم نسبی یا محلی (Relative or Local Maximum) گفته میشود.

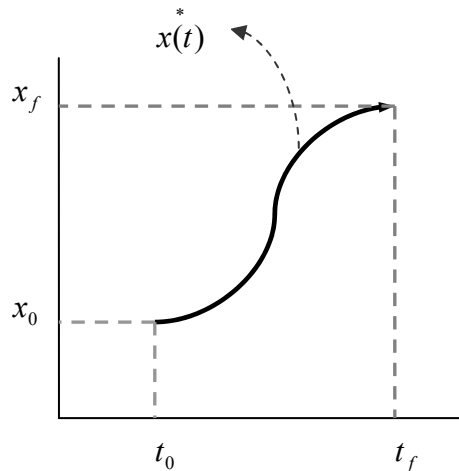
- چنانچه (۲-۳) به ازای  $\varepsilon$  دلخواه و بزرگ درست باشد به  $J(x^*)$  یک مینیمم سراسری (Global Min) و چنانچه (۲-۴) به ازای  $\varepsilon$  دلخواه و بزرگ درست باشد به  $J(x^*)$  یک ماکزیمم سراسری (Global Max) گفته میشود.

به  $x^*$  اکستریمال (Extremal) و به تابع  $J$  در ازای  $x^*$  یعنی  $J(x^*)$  اکسترمم (Extremum) گفته میشود.

### قضیه بنیانی حساب تغییرات (Fundamental Theorem of Calculus of Variations)

تابع  $J(x)$  ( $x \in \Omega$ ) به طوری که  $x$  بدون محدودیت و  $J(x)$  مشتق پذیر باشد مفروض است. چنانچه  $x^*$  یک اکستریمال تابع  $J(x)$  باشد در آن صورت به ازای کلیه مقادیر  $\delta x \in \Omega$  و  $x + \delta x \in \Omega$  خواهیم داشت  $\delta J(x, \delta x) = 0$  [۲۰].

### ۲-۱-۱- مسئله حساب تغییرات با نقاط پایانی ثابت (ساده ترین حالت)



شکل (۲-۱): مسیر بهینه با شرایط اوایه و انتهایی ثابت

همان طور که در شکل (۲-۱) مشاهده میکنید، فرض کنید  $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_f) = x_f \end{cases}$  علاوه بر آن  $t_f, t_0$  مقادیر معین

باشد. هدف آن است که مسیر  $x^*(t)$  به طوری انتخاب شود که تابع  $J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$  کمینه



یا بیشینه گردد. برای یافتن  $x^*(t)$  با توجه به قضیه بنیانی حساب تغییرات ابتدا  $\Delta J$  و سپس  $\delta J$  را محاسبه میکنیم

$$\Delta J = J(x + \delta x) - J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \{g(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) - g(t, x, \dot{x})\} dt \quad (2-5)$$

نکته:  $\delta x, \dot{x}, x$  در واقع همان  $\delta x(t), \dot{x}(t), x(t)$  است. حال رابطه بدست آمده را حول مسیره‌های  $\dot{x}(t), x(t)$  بسط میدهیم:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \{g(t, x, \dot{x}) + \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + O(\delta x, \delta \dot{x}) - g(t, x, \dot{x})\} dt \quad (2-6)$$

که در آن  $O(\delta x, \delta \dot{x})$  تابعی است از  $\delta x, \delta \dot{x}$  با درجه بیشتر از یک. در ادامه با استفاده از انتگرال گیری جز به جز از  $\int_{t_0}^{t_f} (\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}) dt$  میتوان  $\delta \dot{x}$  را حذف کرد و با جایگزینی در رابطه (۲-۶) خواهیم داشت:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \{[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}})] \delta x + O(\delta x, \delta \dot{x})\} dt + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (2-7)$$

که در این جا با نکه داشتن عبارت خطی نتیجه میگیریم:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \{[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}})] \delta x\} dt + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (2-8)$$

از آنجایی که  $x(t_f), x(t_0)$  مشخص هستند تمام مسیره‌های مجاز بایستی از این دو نقطه بگذرد که در آن صورت  $\delta x(t_f) = 0, \delta x(t_0) = 0$ . بنابراین در اکستریمال بایستی

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \{[\frac{\partial g}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}))] \delta x\} dt = 0 \quad (2-9)$$

## لم بنیانی حساب تغییرات

چنانچه برای یک تابع پیوسته مثل  $\alpha(t)$  داشته باشیم:

$$\int_{t_0}^{t_f} \alpha(t) \delta x(t) dt = 0 \quad (2-10)$$

که در آن  $\delta x(t)$  تابعی دلخواه بین  $t_0, t_f$  است آنگاه  $\alpha(t) = 0, \forall t \in [t_0, t_f]$ . [۲۱]

## ۲-۱-۲- شرط لازم اویلر- لاگرانژ

با توجه به رابطه (۲-۹) و لم بنیانی حساب تغییرات به شرط لازمی برای بهینه بودن تابعک  $J$  میرسیم که عبارت است از:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \right) = 0 \quad (2-11)$$

$$\forall t \in [t, t_f]$$

به این شرط، شرط لازم اویلر- لاگرانژ گفته میشود.

در حالت خاص که تابع  $g(t, x, \dot{x})$  به طور صریح مستقل از زمان است به عبارت دیگر

$g(t, x, \dot{x}) = g(x, \dot{x})$  میتوان رابطه (2-11) را با استفاده از قاعده زنجیری بصورت ساده تر زیر نوشت:

$$g(x, \dot{x}) - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} = c \quad (2-12)$$

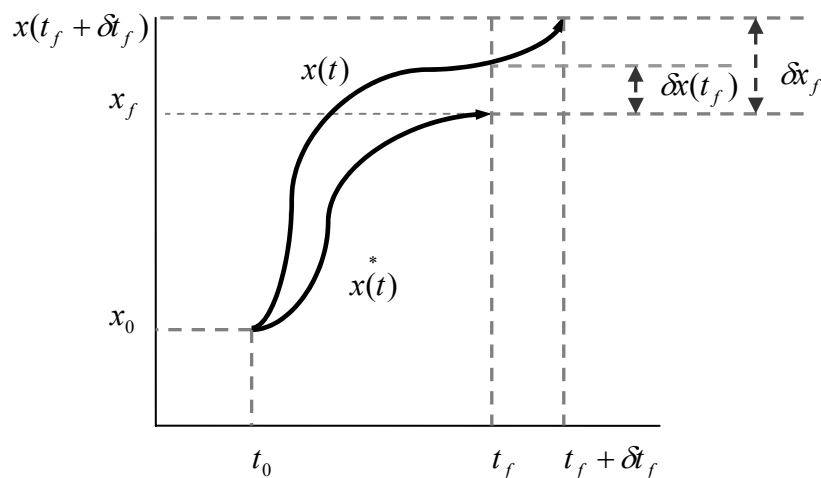
$$\forall t \in [t, t_f]$$

که در آن  $c$  مقدار ثابتی است و از طریق شرایط اولیه در ناحیه مرزی بدست میآید [20].

رابطه (2-12) یک درجه مشتق گیری نسبت به (2-11) کمتر دارد که این موضوع، حل را در مسائل عددی

آسان تر میکند.

## 2-1-3- مسئله حساب تغییرات با نقاط پایانی متغیر



شکل (2-2): مسیر بهینه با نقطه ابتدایی ثابت و انتهای آزاد

فرض کنید هدف پیدا کردن مسیر بهینه تابع  $J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$  باشد بطوری که همان گونه

که در شکل (2-2) مشاهده میکنید نقطه  $t_0$  و  $x(t_0)$  ثابت است و  $t_f$  و  $x(t_f)$  هر دو آزاد هستند.

برای فرموله کردن مسئله  $x(t)$  در بازه  $[t_0, t_f]$  بطوری که  $x(t)|_{t=t_f} = x_f$  مشخص باشد، تغییرات خطی در  $t_f$  و  $x(t_f)$  بوجود می‌آوریم و تغییرات در  $x(t)$  را در نظر می‌گیریم. حال این تغییرات را در بازه زمانی  $[t_0, t_f + \delta t_f]$  محاسبه می‌کنیم و بصورت  $x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$  تعریف می‌کنیم. نکته مهم که در اینجا مدنظر می‌بایست باشد این است که  $\delta x(t_f)$  الزاماً با  $\delta x_f$  برابر نیست و این بوضوح در شکل (۲-۲) مشخص است. با استفاده از تقریب خطی در زمان  $t_f$  رابطه میان  $\delta x(t_f)$  و  $\delta x_f$  به صورت زیر میشود:

$$\delta x(t_f) = \delta x_f - \dot{x}(t_f) \delta t_f \quad (۲-۱۳)$$

حل مسئله در این حالت مشابه قسمت قبلی است با این تفاوت که می‌بایست تغییرات را نیز در نقاط پایانی در  $\Delta J$  در نظر گرفت. با استفاده از رابطه (۲-۱۳) و تقریب خطی  $g(t_f, x(t_f), \dot{x}(t_f))$  حول مسیر بهینه  $x^*(t), \dot{x}^*(t)$  و حذف ترمهای غیر خطی به رابطه زیر میرسیم:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(\ast) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\ast) \right) \right] \delta x \right\} dt + \left. \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\ast) \right|_{t_f} \delta x_f + \left\{ g(\ast) - \dot{x}(\ast) \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\ast) \right\} \bigg|_{t_f} \delta t_f \quad (۲-۱۴)$$

نکته: (\*) همان  $(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$  است.

مشابه قبل شرط لازم در بازه زمانی  $[t_0, t_f]$  این است که معادله اوایلر- لاگرانژ صدق کند و عبارتهای دیگر نیز که وابسته به شرایط مرزی مسئله هستند نیز صفر شوند. در نتیجه شرایط اکسترمم بودن با توجه به قضیه بنیانی حساب تغییرات یعنی  $\delta J = 0$  بصورت زیر خلاصه میشود:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) = 0 \quad (۲-۱۵)$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \right|_{t_f} \delta x_f + \left\{ g(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \dot{x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \right\} \bigg|_{t_f} \delta t_f = 0$$

و در حالآزاد بودن  $\delta t_f$  و  $\delta x_f$  هر یک از ضرایب آنها در قسمت دوم رابطه (۲-۱۵) برابر صفر خواهد بود و در غیر این صورت برای حل به رابطه مابین  $\delta x_f$  و  $\delta t_f$  احتیاج است.

## ۲-۱-۴- نتایج در حالت چند بعدی $x(t) \in R^n$

نتایج در حالت چند بعدی مشابه قبل خواهد بود که در این قسمت تنها به بیان روابط اکتفا می‌کنیم:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) \right]^T \delta x \right\} dt + \left. \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right)^T \right|_{t_f} \delta x_f + \left\{ g - \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right)^T \dot{x} \right\} \bigg|_{t_f} \delta t_f \quad (۲-۱۶)$$

در نتیجه

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) \right]^T (t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) = 0 \quad (2-17)$$

$$\left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right)^T (t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \Big|_{t_f} \delta \dot{x}_f + \left\{ g(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right)^T (t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \dot{x}^* \right\} \Big|_{t_f} \delta \dot{x}_f = 0$$

تنها نکته‌ای که در مسائل چند بعدی بایستی در نظر گرفت این است که به علت سر و کار داشتن با بردار بجای اسکالر، کلیه درایه‌های برداری بایستی در شرایط مرزی صدق کنند و در نتیجه مسئله بصورت تک تک

در نظر گرفته میشود. بطور مثال در رابطه  $\left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right)^T (*) \Big|_{t_f} \delta \dot{x}_f$  با فرض مستقل بودن عناصر بردار  $x(t)$  برخی از آنها میتوانند مشخص، برخی دیگر آزاد (غیر وابسته) و برخی دیگر تابعی نسبت به  $t_f$  باشند. نتیجه گیری این است که هر عبارت فوق جداگانه باید چک شود. در نتیجه واضح است که وقتی  $x_k(t_f)$  به ازای  $k=1, \dots, r$  مشخص است  $\delta \dot{x}_k|_{t_f} = 0$  و برای  $k=r+1, \dots, n$   $\delta \dot{x}_k|_{t_f} \neq 0$  است.

## ۲-۲- تابع همیلتونین (Hamiltonian)

### تعریف

تابع لاگرانژ  $g: R \times R^n \times R^n \rightarrow R$  مفروض است. تابع همیلتونی  $H: R \times R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R$  بصورت زیر تعریف میشود:

$$H(t, x, r, p) = \sum_{i=1}^n p_i r_i - g(t, x, r) = \langle p, r \rangle - g(t, x, r) \quad (2-18)$$

حال واضح است که با توجه به تعریف فوق روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(t, x, r, p) = - \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x, r, p)$$

$$\frac{\partial H}{\partial r_i}(t, x, r, p) = p_i - \frac{\partial g}{\partial r_i}(t, x, r, p), \quad i=1 \dots n \quad (2-19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(t, x, r, p) = r_i$$

در اینجا روابط اوایلر- لاگرانژ را به فرم همیلتونی بازسازی میکنیم.

با توجه به رابطه (۲-۱۱) ما  $n$  معادله دیفرانسیل درجه دو داریم اما میتوان نشان داد که این  $n$  معادله دیفرانسیل درجه دو اوایلر- لاگرانژ را میتوان بصورت  $2n$  معادله دیفرانسیل درجه یک بازنویسی کرد. یعنی

$$\dot{x}_i(t) = r_i(t), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x(t), r(t)) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial r_i}(t, x(t), r(t)) \right] = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2-20)$$

حال علاوه بر روابط فوق تعریف زیر را انجام میدهیم:

$$p_i(t) = \frac{\partial g}{\partial r_i}(t, x(t), r(t)), \quad i = 1 \dots n \quad (2-21)$$

در این صورت میتوان رابطه اوایلر- لاگرانژ را با توجه به تغییر متغیرهای (2-20) و (2-21) بصورت زیر نوشت:

$$\dot{x}_i(t) = r_i(t) \quad (2-22)$$

$$\dot{p}_i(t) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x(t), r(t))$$

$$p_i(t) - \frac{\partial g}{\partial r_i}(t, x(t), r(t)) = 0 \quad (2-23)$$

که در آن رابطه (2-22)  $2n$  معادله درجه یک و رابطه (2-23)  $n$  معادله جبری است. حال با استفاده از نتایج فوق و تعریف تابع همیلتونین در رابطه (2-18) نهایتاً معادلات اوایلر- لاگرانژ به فرم زیر بازسازی میشوند.

## 2-2-1- فرم همیلتونین معادلات اوایلر- لاگرانژ

دقت شود که روابط (2-24) به صورت برداری نوشته شده است.

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), r(t), p(t))$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), r(t), p(t)) \quad (2-24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial r}(t, x(t), r(t), p(t)) = 0$$

### نتیجه گیری

اگر و فقط اگر توابع هموار (Smooth)  $r(t): [t_0, t_f] \rightarrow R^n$  و  $p(t): [t_0, t_f] \rightarrow R^n$  وجود داشته باشند که با تابع  $x(t): [t_0, t_f] \rightarrow R^n$  روابط (2-24) را ارضا کنند در این صورت  $x(t)$  معادلات اوایلر- لاگرانژ را به ازای تابع لاگرانژی  $g$  ارضا خواهد کرد.

نکته جالب این است که تابع همیلتونین همان تابع انرژی اکستریم ما است از طرف دیگر میتوان نشان داد که:

$$\frac{dH}{dt}(t, x(t), \dot{x}(t), \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, x(t), \dot{x}(t), \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))) \quad (2-25)$$

رابطه (۲-۲۵) براحتی با استفاده از قاعده زنجیری و رابطه (۲-۲۴) که از تعریف تابع همیلتونی بدست می آید قابل استخراج است. از طرف دیگر با توجه به تعریف (۲-۱۸) میتوان رابطه زیر را نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x(t), \dot{x}(t), \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))) = -\frac{\partial g}{\partial t}(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad (2-26)$$

با توجه به روابط (۲-۲۵) و (۲-۲۶) اگر تابع لاگرانژی  $g$  مستقل از زمان باشد یعنی  $\frac{\partial g}{\partial t}(t, x, \dot{x}) = 0$  باشد

یا به عبارت دیگر  $g(t, x, \dot{x}) = g(x, \dot{x})$  و  $x(t)$  حل معادله اولر-لاگرانژ در ازای آن تابع لاگرانژی باشد در آن صورت تابع همیلتونی یا همان تابع انرژی در روی مسیر اکستریم ثابت خواهد ماند (پایستاری انرژی (Conservation of Energy)).

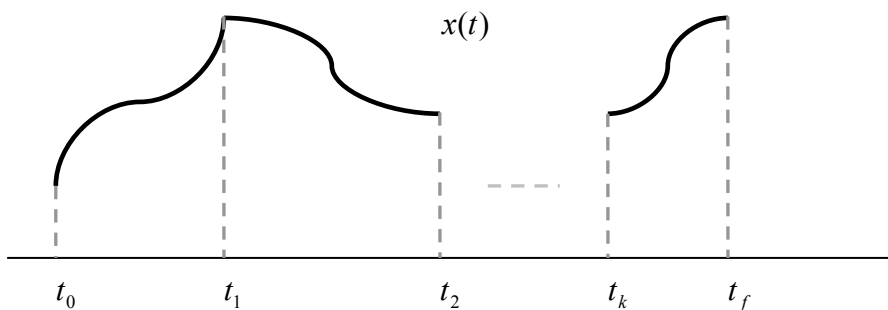
### ۲-۳- کنترل بهینه

مفروضات مسئله: سیستم دینامیکی (معادلات حالت) زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (2-27)$$

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$$

که در آن  $f: R \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$  تابعی هموار در بازه  $[t_0, t_f]$  است، به بیان دیگر  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial u}$  در این بازه وجود دارد.  $u$  نیز یک ورودی کنترلی بوده که در حالت کلی تابعی تکه ای پیوسته است و از  $[t_0, t_f]$  به  $R^m$  تعریف میشود. بطوری که با فرض اولیه  $x(t_0) = x_0$  که در آن  $x_0 \in R^n$  حل معادله حالت (۲-۲۷) منجر به مسیر حالت یکتای  $x(t)$  روی  $[t_0, t_f]$  میشود.



شکل (۲-۳): مسیر حالت پیوسته تحت ورودی کنترلی تکه ای پیوسته

همان گونه که در شکل (۲-۳) مشاهده میکنید  $x(t)$  تابع تکه ای پیوسته با گوشه های  $t_1, \dots, t_k$  است که این گوشه ها متناظر با نقاط ناپیوسته در ورودی سیستم خواهد بود. در اینجا به جفت  $u(t), x(t)$  ورودی-مسیر حالت گفته میشود که با STI pair (State Trajectory Input Pair) نشان داده میشود.

### نکاتی پیرامون مسئله کنترل بهینه

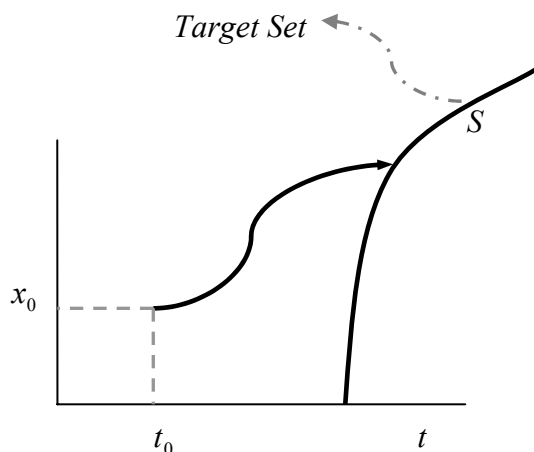
۱. اگر  $x(t_f) = x_f$  باشد آنگاه واضح است که جفت  $u(t), x(t)$  سیستم را از نقطه  $(t_0, x_0)$  به  $(t_f, x_f)$  منتقل خواهد کرد.

۲. شرایط اولیه و زمان اولیه معمولاً مفروض است.  $x_0 \in R^n, t_0 \in R$ .

۳. مجموعه هدف با محدودیت های احتمالی نقاط پایانی مفروض است یعنی  $S \subset R \times R^n$  بطوری که:

$$S = \{(t, x) \in R \times R^n \mid m_i(t_f, x_f) = 0, \quad 1 \leq i \leq k\} \quad (2-28)$$

که در آن یک تابع هموار است و نشان دهنده محدودیت هایست که بایستی ارضا شود.



شکل (۲-۴): مسیر بهینه با نقطه انتهایی متغیر بر روی رویه  $S$

۴. ورودی کنترل و مجموعه محدودیتهای آن مفروض است، یعنی  $u(\cdot) \in C$  و  $C \subset R^m$  است.

۵. مجموعه محدودیت های حالت نیز مفروض خواهد بود. یعنی  $x(\cdot) \in K$  و  $K \subset R^n$  است.

۶. تابع هزینه نیز بصورت زیر مفروض است:

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} g(t, x, u) dt + h(t_f, x_f) \quad (2-29)$$

بطوری که  $g: R \times R^n \times R^m \rightarrow R$  و  $h: R \times R^n \rightarrow R$  توابعی هموار در بازه  $[t_0, t_f]$  است. به تابع  $g(t, x, u)$  تابع لاگرانژی می گوییم.

### ۲-۳-۱- تعریف مسئله کنترل بهینه

در میان تمام جفتهای STI که در بازه زمانی  $[t_0, t_f]$  تعریف شده‌اند و سیستم را از نقطه  $(t_0, x_0)$  به  $(t_f, x_f) \in \mathcal{S}$  منتقل میکند و محدودیت های پایانی، محدودیت های کنترلی  $u(\cdot) \in C$  و محدودیت های حالت  $x(\cdot) \in K$  را ارضا میکند، مطلوب است جفت  $\{u^*(t), x^*(t)\}$  بطوری که تابعک (۲-۲۹) مینیمم شود.

### تذکر

- تابعک  $J$  را بصورت (۲-۲۹) بلگا (Bolza) میگویند
- اگر در رابطه (۲-۲۹) هزینه انتهای مسیر،  $h(t_f, x_f)$ ، صفر باشد تابعک را از نوع لاگرانژین (Lagrangian) میگویند.
- اگر در رابطه (۲-۲۹)  $g(t, x, u)$  صفر باشد تابعک را از نوع مییر (Mayer) میگویند.

### ۲-۳-۲- تعمیم حساب تغییرات به مسائل کنترل بهینه

در جهت تعمیم نتایج بدست آمده و بکار گیری آن در مسائل کنترل بهینه موارد زیر انجام میپذیرد.

- تابع  $h(t_f, x_f)$  را با استفاده از رابطه:

$$h(t_f, x_f) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{dh}{dt} dt + h(t_0, x_0) \quad (۲-۳۰)$$

وارد انتگرال  $J$  در رابطه (۲-۲۹) کنیم. از آنجایی که قسمت  $h(t_0, x_0)$  مقداری ثابت است میتوان در مسئله بهینه سازی از آن صرفه نظر کرد.

- معادلات حالت در رابطه (۲-۲۷) را به عنوان محدودیت دینامیکی با استفاده از ضریبی معروف به ضریب لاگرانژ  $(\psi(t) \in R^n)$  در تابع هزینه  $J$  وارد میکنیم و با توجه به رابطه (۲-۳۰) میتوان به تابع هزینه افزوده شده  $J_a$  زیر برسیم:

$$J_a(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \{g(t, x(t), u(t)) + \frac{dh}{dt}(t, x(t)) + \psi^T(t)[f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t)]\} dt \quad (۲-۳۱)$$

با در نظر داشتن رابطه (۲-۳۱) و تعریف تابع لاگرانژی تعمیم یافته  $g_a(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t))$  بصورت زیر

$$g_a(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) = g(t, x(t), u(t)) + \frac{dh}{dt}(t, x(t)) + \psi^T(t)[f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t)] \quad (۲-۳۲)$$

و نوشتن رابطه اویلر- لاگرانژ (۲-۱۷) برای آن خواهیم داشت:



$$\frac{\partial g_a}{\partial x}(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) = 0 \quad (2-33)$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial u}(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{u}}(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) = 0 \quad (2-34)$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial \psi}(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\psi}}(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) = 0 \quad (2-35)$$

پس با توجه به رابطه اویلر- لاگرانژ برای تابع لاگرانژی تعمیم یافته  $g_a(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t))$  که منجر به روابط (2-33)، (2-34) و (2-35) میشود، میتوان توابع بهینه  $x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)$  را بدست آورد. اما اگر به رابطه (2-35) نگاه کنیم براحتی میتوان مشاهده کرد که این رابطه دقیقاً همان دینامیک محدود کننده روی متغیرهای حالت ما است. در نتیجه با در نظر گرفتن (2-35) در (2-32) به همان تابع اولیه لاگرانژی  $g(t, x, u)$  میرسیم. به بیان دیگر، میتوان به براحتی مشاهده کرد که تابع هزینه تعمیم داده شده  $J_a$  دارای مسیر اکسترممی بر روی مسیر اکسترمم تابع هزینه اولیه  $J$  خواهد بود. در حقیقت تنها با اضافه کردن قسمت دینامیک سیستم،  $f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t)$ ، به تابع لاگرانژی این محدودیت را وارد محاسبات خود کرده ایم. حال با توجه به تعریف تابع همیلتونین بصورت:

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = g(t, x(t), u(t)) + \psi^T(t) f(t, x(t), u(t)) \quad (2-36)$$

میتوان روابط (2-33)، (2-34) و (2-35) را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = - \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) \quad (2-37)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) = 0 \quad (2-38)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi}(t, x, \dot{x}, u(t), \psi(t)) \quad (2-39)$$

برای شرایط مرزی نیز میتوان با استفاده از تابع همیلتونین در (2-36) رابطه زیر را بیان کرد:

$$\left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) (t_f, x^*(t_f)) - \psi^*(t_f) \right\} \delta x_f + \left\{ H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \psi^*(t_f)) + \frac{\partial h}{\partial t} (t_f, x^*(t_f)) \right\} \delta t_f = 0 \quad (2-40)$$

از جانب دیگر اگر از تابع همیلتونین در رابطه (2-36) نسبت به زمان مشتق بگیریم آنگاه

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2-41)$$

حال با توجه به (2-38) قسمت سوم رابطه (2-41) صفر است. با جایگذاری  $\dot{x}, \dot{\psi}$  از روابط (2-37) و (2-39) در رابطه (2-41) خواهیم دید که قسمتهای دوم و سوم رابطه (2-41) نیز با هم ساده میشود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2-42)$$

که در آن  $c$  مقدار ثابتی است. رابطه (2-42) رابطه مهمی است که یکی از خصوصیات مینفولد  $H$  را بر روی مسیر اکستریمال نشان می‌دهد که تغییرات رویه  $H(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), \psi^*(t))$  نسبت به زمان برابر تغییرات آن منحصرأ نسبت به زمان است. بطور مثال اگر بردارهای  $g, f$  بطور منحصرأ به متغیر  $t$  بستگی نداشته باشد در نتیجه با توجه به رابطه همیلتونین، (2-36)،  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$  خواهد بود و به رابطه مهم زیر

میرسیم:

$$H = c \quad (2-43)$$

به این رابطه در فصل بعدی اشاره خواهیم کرد.

حال اگر  $t_f$  آزاد و  $x(t_f)$  مشخص باشد  $\delta x_f = 0$  خواهد بود و از جانب دیگر اگر تابع  $h(t_f, x_f)$  در تابع هزینه (2-29) صفر باشد آنگاه شرایط مرزی را میتوان بصورت

$$H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \psi^*(t_f)) = 0 \quad (2-44)$$

بیان نمود. با توجه به روابط (2-44) و (2-43) و پیوستگی تابع همیلتونی نتیجه میگیریم که تابع

$H((t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)))$  در طول مسیر  $[t_0, t_f]$  ثابت و برابر صفر است.

## فصل سوم

### طراحی کنترل بهینه حلقه باز برای سیستمهای خطی و

### غیرخطی مستوی

در این فصل ابتدا مسئله بهینه سازی را در قالب یک تابع هزینه مناسب، که جنبه های مختلف طراحی در کنترل از جمله بهینه کردن انرژی ورودی سیستم، رفتار مناسب حالتها و خروجی سیستم را در بر دارد، تعریف میکنیم. در مرحله بعدی کنترل کننده مناسب مربوط به این مسئله بهینه سازی را در سیستمهای خطی و سیستمهای غیرخطی مستوی به صورت حلقه باز طراحی میکنیم و روش تحلیلی و عددی مناسب برای رسیدن به جواب نهایی را مورد بررسی قرار می دهیم.

### ۳-۱- مسئله کنترل حلقه باز

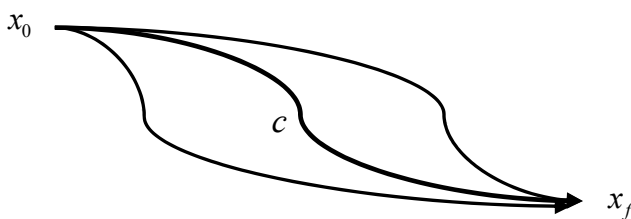
سیستم غیر خطی و مستوی (Input Affine) زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (۳-۱)$$

که در آن  $x$  بردار حالت  $n$  بعدی و  $f, g$  میدانهای برداری هموار در  $R^n$  میباشند.  $u$  نیز ورودی کنترلی اسکالر میباشد. حال هدف این است که  $u(t)$  کنترلی را در بازه زمانی  $[t_0, t_f]$  به گونه ای بیابیم که سیستم را همان طور که در شکل (۳-۱) مشاهده میکنید، از مقدار اولیه  $x(t_0) = x_0$  به  $x(t_f) = x_f$  منتقل کند و تابع هزینه

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (۳-۲)$$

کمینه شود (به بیان دیگر از میان مسیرهای ممکن در صدد یافتن مسیر بهینه  $c$  هستیم) در تابع هزینه (۳-۲)،  $Q$  ماتریس  $n \times n$  مثبت نیمه معین و  $R$  ماتریس  $m \times m$  مثبت معین است.



شکل (۳-۱): مسیرهای ممکن برای رسیدن از  $x_0$  به  $x_f$

### نکته

- باتوجه به اینکه  $u$  یک متغیر اسکالر است در نتیجه ماتریس  $R$  نیز یک ماتریس  $1 \times 1$  خواهد بود، اما در ادامه در روابط همچنان فرم ماتریسی را حفظ میکنیم به این علت که مطالبی که در ادامه ذکر خواهد شد براحتی قابل تعمیم به سیستمهایی با چند ورودی نیز خواهد بود.
- حال با توجه به مطالبی که در فصل پیش گفته شد به حل مسئله مطرح شده میپردازیم. در این راستا با توجه به اینکه

$$f(t, x(t), u(t)) = f(x) + g(x)u \quad (۳-۳)$$

$$g(t, x(t), u(t)) = \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u)$$

و با جایگذاری آن در رابطه (۲-۳۶) تابع همیلتونین را برای مسئله فوق تشکیل میدهم:

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + \psi^T(t) (f(x) + g(x)u(t)) \quad (۳-۴)$$

حال با استفاده از روابط (۲-۳۷)، (۲-۳۸) و (۲-۳۹) میتوان به نتایج زیر رسید:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi - \frac{\partial g}{\partial x} u \quad (۳-۵)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = Ru + g^T(x)\psi \quad (۳-۶)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (۳-۷)$$

در روابط (۳-۵)، (۳-۶) و (۳-۷) به متغیر  $\psi(t)$  که هم بعد متغیر حالت ما،  $x(t)$ ، است، متغیر هم حالت یا هم حالت (Co State) میگوییم. از رابطه (۳-۶) و این نکته که ماتریس  $R$  یک ماتریس مثبت معین است و معکوس پذیر نیز خواهد بود، براحتی میتوان ورودی کنترلی  $u(t)$  را بدست آورد یعنی:

$$u(t) = -R^{-1}g(x)^T \psi(t) \quad (۳-۸)$$

در نتیجه همان طور که میبینیم با استفاده از رابطه (۳-۸) و جاگذاری آن در رابطه (۳-۵) به یک دسته معادله دیفرانسیل عادی (ODE) از درجه یک با  $2n$  متغیر میرسیم:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - g(x)R^{-1}g(x)^T \psi \\ \dot{\psi} = -Qx - \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T - \frac{\partial g}{\partial x} R^{-1}g(x)^T\right) \psi \end{cases} \quad (۳-۹)$$

این معادله دیفرانسیل  $2n$  بعدی دارای  $n$  شرط اولیه  $x(t_0) = x_0$  و  $n$  شرط نهایی  $x(t_f) = x_f$  می باشد که این موضوع حل تحلیل و یا حتی عددی آن را دشوار میسازد. اگر بجای  $n$  شرط نهایی  $x(t_f) = x_f$ ،  $n$  شرط اولیه  $\psi(t_0) = \psi_0$  در دسترس بود رابطه (۳-۹) یک معادله دیفرانسیل عادی (ODE) با شرایط اولیه مشخص بود که براحتی حل می گشت.

راه حل اولی که برای پیشبرد این مسئله ارائه می شود استفاده از رابطه (۲-۴۳) فصل قبل میباشد. با توجه به اینکه بردارهای  $g, f$  به متغیر  $t$  بستگی ندارد، تابع همیلتونی در طول مسیر ثابت است. در نتیجه میتوان از این رویه برای انتقای دردن شرایط مرزی از انتهای مسیر به ابتدای آن استفاده کرد. اما متأسفانه به علت تک بعدی بودن تابع همیلتونین  $H$  تنها میتوان یک بعد از دامنه مجهولاتیمان در شرایط اولیه کاست. به بیان دیگر این برای حل این مشکل مناسب نخواهد بود.

راه دیگری که ما قصد داریم به آن بپردازیم روش شلیک (Shooting Method) است که قبل از پرداختن به آن احتیاج به پیش زمینه ای برای آن است.

### ۳-۲- مقدمه ای بر روش شلیک تعمیم داده شده (Shooting Method)

در مراجع موجود روش شلیک برای تنها متغیرهای اسکالر بیان شده است [۲۲] اما در این قسمت ما آن را بصورت برداری و در حالتی کلی تر بیان میکنیم.

معادله دیفرانسیل غیر خطی و عادی از درجه یک با  $2n$  متغیر همراه با مقادیر مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = h(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = k(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (۳-۱۰)$$

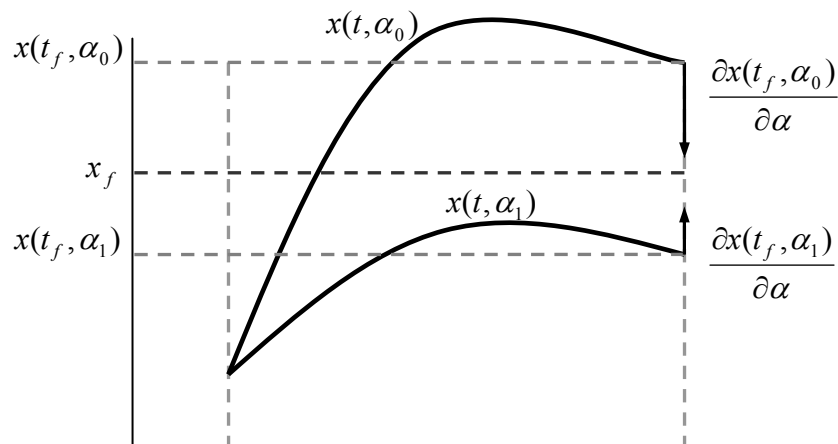
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \quad (۳-۱۱)$$

که در آن بردارهای  $n$  بعدی و  $h, k$  میدانهای برداری هموار در  $R^n$  و  $0 < t < t_f$  میباشند. هدف پیدا کردن شرط اولیه مناسب  $y(t_0) = y_0$  (در صورت وجود) است که از حل معادله دیفرانسیل (۳-۱۰) به همراه شرایط اولیه  $[x_0, y_0]^T$  بتوان به نقطه انتهایی  $[x_f, y_f]^T$  رسید.

حال برای حل این مسئله شرط اولیه  $y(t_0) = \alpha$  را در نظر میگیریم. بدیهی است که شرط پایانی  $x(t_f)$  تابعی از  $\alpha$  خواهد بود به بیان دیگر  $x(t_f) = x(t_f, \alpha)$ . مسیر اصلی حل این مسئله به این صورت است که با تغییر  $\alpha$  بدنبال محاسبه کردن میزان تغییرات  $x(t_f, \alpha)$  هستیم تا بدین وسیله بتوانیم بگونه ای قابل قبول  $x(t_f, \alpha)$  را به مقدار مورد نظر  $x_f$  میل دهیم. در این مسیر از روش بنام روش نیوتن استفاده می‌کنیم.

### ۳-۲-۱- روش نیوتن

در [۲۲] ابتدا با تعریف روش سکانت (Secant) مقدمه ای برای روش نیوتن آورده است اما چون این گونه مطرح کردن روش نیوتن ما را در دو بعد محدود می‌کند از ابتدا آن را بصورت برداری و در حالت کلی تر نشان میدهیم.



شکل (۳-۲): نحوه بهبود  $\alpha_i$  در روش نیوتن با توجه به اطلاعات موجود در شرایط نهایی

در روش نیوتن ابتدا مقداری دلخواه برای  $\alpha$  مثلاً  $\alpha_1$  در نظر میگیریم. حال معادله دیفرانسیل (۳-۱۰) را با توجه به این مقدار اولیه  $[x_0 \ \alpha_1]^T$  حل میکنیم و متعاقباً شرط پایانی  $x(t_f, \alpha_1)$  بدست میاید. همان گونه که در شکل (۳-۲) مشاهده میشود در اینجا با زدن تقریب خطی  $x(t_f, \alpha)$  نسبت به  $\alpha$  به روابط زیر میرسیم:

$$x(t_f, \alpha_2) \cong x(t_f, \alpha_1) + \left. \frac{\partial x(t_f, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (3-12)$$

اما موضوعی که در این جا مطرح است نحوه بدست آوردن  $\frac{\partial x(t_f, \alpha)}{\partial \alpha}$  میباشد. توجه شود که کمیت  $\frac{\partial x(t_f, \alpha)}{\partial \alpha}$  یک ماتریس  $n \times n$  است. با مشتق گیری طرفین نسبت به متغیر  $\alpha$  از معادله (۳-۱۰) به رابطه زیر میرسیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial \alpha} = \frac{\partial h(x(t), y(t))}{\partial \alpha} = \frac{\partial h(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial h(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial \alpha} = \frac{\partial k(x(t), y(t))}{\partial \alpha} = \frac{\partial k(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial k(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{cases} \quad (3-13)$$

که در آن  $0 < t < t_f$  است. حال با توجه به اینکه در شرایط خوبی جابجاپذیری مشتق امکان پذیر است میتوان روابط زیر را در نظر داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial \alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x(t)}{\partial \alpha} \right) \\ \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial \alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y(t)}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \quad (3-14)$$

حال متغیرهای  $z_2, z_1$  که دو ماتریس  $n \times n$  است را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{\partial x(t)}{\partial \alpha} \\ z_2(t) &= \frac{\partial y(t)}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (3-15)$$

در نتیجه میتوان (3-13) را بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \frac{\partial h(x(t), y(t))}{\partial x} z_1(t) + \frac{\partial h(x(t), y(t))}{\partial y} z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = \frac{\partial k(x(t), y(t))}{\partial x} z_1(t) + \frac{\partial k(x(t), y(t))}{\partial y} z_2(t) \end{cases} \quad (3-16)$$

همان طور که در رابطه (3-16) مشخص است معادلات دیفرانسیل دو متغیر  $z_2, z_1$  بدست آمده است. حال اگر رابطه (3-16) را با رابطه (3-10) همزمان در نظر بگیریم یک دستگاه معادله دیفرانسیل عادی  $2n^2 + 2n$  در بازه  $0 < t < t_f$  داریم که  $2n$  معادله مربوط به رابطه (3-10) و  $2n^2$  معادله مربوط به معادله (3-16) میباشد.

نکته دیگری که میباشد مدنظر قرار گیرد شرایط اولیه  $z_2(t), z_1(t)$  میباشد. با توجه به اینکه متغیر  $x(t)$  در  $t_0$  مشخص میباشد با تغییرات پارامتر  $\alpha$  متغیر  $x(t)$  در زمان  $t_0$  تغییری نخواهد داشت به بیان دیگر  $z_1(t_0) = \frac{\partial x(t_0)}{\partial \alpha} = 0_{n \times n}$ . از جانب دیگر با توجه به اینکه  $y(t_0) = \alpha$  در نظر گرفته شده است با تغییرات پارامتر  $\alpha$ ،  $z_2(t_0) = \frac{\partial y(t_0)}{\partial \alpha} = I_{n \times n}$  خواهد بود.

در نهایت از مطالب گفته شده به روابط زیر میرسیم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = h(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = k(x(t), y(t)) \\ \dot{z}_1(t) = \frac{\partial h(x(t), y(t))}{\partial x} z_1(t) + \frac{\partial h(x(t), y(t))}{\partial y} z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = \frac{\partial k(x(t), y(t))}{\partial x} z_1(t) + \frac{\partial k(x(t), y(t))}{\partial y} z_2(t) \end{cases} \quad (3-17)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = \alpha, \quad z_1(t_0) = 0, \quad z_2(t_0) = I \quad (3-18)$$

که در آن  $t$  در بازه  $[t_0, t_f]$  میباشد. این  $2n^2 + 2n$  معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه (3-18) قابل حل است.



حال مسئله آخر نحوه بهبود بخشیدن پارامتر  $\alpha$  است. برای این مسئله از تقریب خطی در رابطه (۳-۱۲) استفاده میکنیم. برای این منظور کافیسست  $\frac{\partial x(t_f, \alpha)}{\partial \alpha} = z_1(t_f)$  قرار دهیم و بدین صورت با انتخاب مقدار اولیه دلخواه  $\alpha_1$  برای پارامتر  $\alpha$  به رابطه زیر میرسیم:

$$x(t_f, \alpha_2) \cong x(t_f, \alpha_1) + z_1(t_f)(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (۲-۱۹)$$

با توجه به رابطه بالا میتوان رابطه بازگشتی برای تنظیم پارامتر  $\alpha$  بدست آورد:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + z_1(t_f)^{-1}(x_f - x(t_f, \alpha_n)) \quad (۳-۲۰)$$

که در آن  $x_f$  همان شرط نهایی مورد نظر در رابطه (۳-۱۱) است.

حال الگوریتم مطرح شده را در دو حالت مختلف سیستم های خطی و غیر خطی برای مسئله بهینه سازی که در ابتدای این فصل مطرح شد، مورد بررسی قرار میدهم.

### ۳-۳- کنترل بهینه سیستم های خطی

سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۳-۲۱)$$

که در آن  $x$  بردار حالت  $n$  بعدی،  $A$  ماتریس متعلق به  $R^{n \times n}$  و  $B$  یک بردار متعلق به  $R^n$  و  $u(t)$  ورودی کنترلی اسکالر میباشد. حال مسئله بهینه سازی به این صورت مطرح میشود که  $u(t)$  کنترلی را در بازه زمانی  $[t_0, t_1]$  به گونه ای بیابیم که سیستم را از مقدار اولیه  $x(t_0) = x_0$  به  $x(t_f) = x_f$  منتقل کند و

تابع هزینه  $J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt$  مینیمم شود که در آن  $Q$  ماتریس  $n \times n$  مثبت نیمه معین و  $R$  ماتریس  $m \times m$  مثبت معین است.

با توجه به مسئله مطرح شده در ابتدای این فصل و مقایسه رابطه (۳-۲۱) با رابطه (۳-۱) به این نتیجه میرسیم که  $f(x) = Ax$  و  $g(x) = B$  است. پس میتوان رابطه (۳-۹) به همراه شرایط اولیه که از روابط بهینه سازی بدست میاید را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) = -Qx(t) - A^T \psi(t) \end{cases} \quad (۳-۲۲)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \quad (۳-۲۳)$$

حال با مقایسه روابط (۳-۲۲) و (۳-۲۳) با (۳-۱۰) و (۳-۱۱) میتوان نتیجه گرفت که با تعریف  $y(t) \equiv \psi(t)$ ، قرار دادن  $h(x, \psi) = Ax(t) - BR^{-1}B^T\psi(t)$  و  $k(x, \psi) = -Qx(t) - A^T\psi(t)$  میتوان از الگوریتم شلیک استفاده کنیم و روابط (۳-۱۷)، (۳-۱۸) و (۳-۲۱) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T\psi(t) \\ \dot{\psi}(t) = -Qx(t) - A^T\psi(t) \\ \dot{z}_1(t) = Az_1(t) - BR^{-1}B^Tz_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -Qz_1(t) - A^Tz_2(t) \end{cases} \quad (۳-۲۴)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \psi(t_0) = \alpha_0, \quad z_1(t_0) = 0, \quad z_2(t_0) = I \quad (۳-۲۵)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + z_1(t_f)^{-1}(x_f - x(t_f, \alpha_n)) \quad n \geq 0 \quad (۳-۲۶)$$

### نکته

۱. دینامیک سیستم برای متغیرهای  $z_2(t), z_1(t)$  دقیقاً همان دینامیک سیستم برای متغیرهای حالت  $x(t)$  و متغیرهای کمکی حالت  $\psi(t)$  میباشد. به بیان دیگر اگر متغیر ماتریسی  $\theta(t)$  را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} x(t) & z_1(t) \\ \psi(t) & z_2(t) \end{bmatrix} \quad (۳-۲۷)$$

که در آن  $\theta(t) \in R^{2n \times (n+1)}$  است و ماتریس ثابت  $\Lambda$  نیز بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (۳-۲۸)$$

که در آن  $\Lambda \in R^{2n \times 2n}$  است را در نظر بگیریم میتوان رابطه (۳-۲۴) و (۳-۲۵) را بصورت زیر نوشت:

$$\dot{\theta}(t) = \Lambda\theta(t) \quad (۳-۲۹)$$

$$\dot{\theta}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & I \end{bmatrix} \quad (۳-۳۰)$$

۲. بدست آوردن سیگنال کنترل بهینه  $u(t)$  برای یک سیستم خطی از درجه  $n$  تبدیل به حل  $n+1$  معادله دیفرانسیل خطی از درجه  $2n$  گردید که این  $n+1$  معادله دیفرانسیل تنها در شرایط اولیه با هم متفاوت بوده و از نظر دینامیک دارای ساختار یکسان که در رابطه (۳-۲۹) نیز مشخص است میباشد.

۳. مورد دیگری که در اینجا میبایست مورد بحث قرار گیرد سرعت همگرایی رابطه بازگشتی (۳-۲۶) میباشد. در سیستمهای خطی پاسخ سیستم نسبت به شرایط اولیه خطی خواهد بود. بطور مثال، در

رابطه (۳-۲۹) پاسخ  $\theta(t)$  در بازه زمانی  $[t_0, t_1]$  بصورت  $\theta(t) = e^{\Lambda t} \theta(t_0)$  میباشد در نتیجه مقدار  $\frac{\partial \theta(t_f)}{\partial \theta(t_0)} = e^{\Lambda t_f}$  مقداری ثابت است. به همین خاطر در سیستمهای خطی تقریب درجه اول (خطی) رابطه (۳-۱۲) به یک رابطه دقیق تبدیل میشود. و به بیان دیگر رابطه بازگشتی (۳-۲۶) در یک مرحله به جواب میرسد.

### ۳-۳-۱- مثال عددی و شبیه سازی

در این قسمت با یک مثال عددی مطالب ذکر شده در قسمت قبلی را نشان می‌دهیم. فرض کنیم که در رابطه (۳-۲۱) داشته باشیم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.3 \\ -0.2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

زمان آغاز  $t_0 = 0$  و زمان پایان  $t_f = 3$  در نظر گرفته شده است و همچنین شرایط اولیه و نهایی بصورت زیر است:

$$x(0) = [4 \quad 5 \quad -2 \quad 5]^T \quad (3-32)$$

$$x(3) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

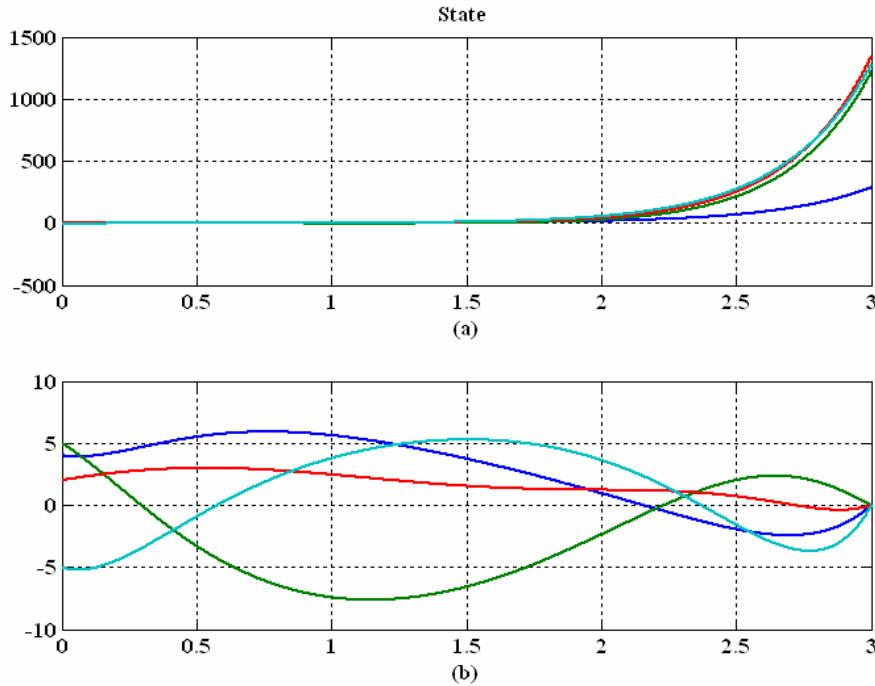
هدف این است که  $u(t)$  کنترلی را در بازه زمانی  $[0, 3]$  به گونه ای بیابیم که سیستم را از مقدار اولیه  $x(0)$

به  $x(3)$  منتقل کند و تابع هزینه  $J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt$  مینیمم گردد که در آن:

$$Q = 3I_{4 \times 4} \quad (3-33)$$

$$R = 1$$

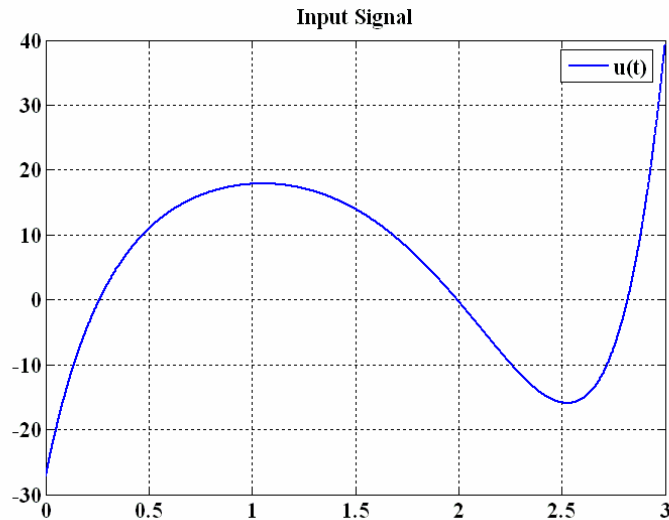
در نظر گرفته شده است. بعد از بدست آوردن  $\Lambda$  با استفاده از رابطه (۳-۲۸) و اطلاعات رابطه (۳-۳۲) و (۳-۳۳) میتوان تنها در یک مرحله از طریق رابطه بازگشتی (۳-۲۶) شرط اولیه مناسب برای متغیر هم حالت  $\psi(t)$  را بدست آورد.



شکل (۳-۳): نمودار حالت‌های سیستم برای دو مقدار مختلف  $\psi(0)$

(a) مقدار دلخواه برای  $\psi(0)$ ، (b) مقدار بهبود یافته برای  $\psi(0)$ .

در شکل (۳-۳-a) برای شرط اولیه متغیر هم حالت  $\psi(0)$  مقدار دلخواه  $\alpha_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  را انتخاب شده است. همانطور که انتظار داشتیم و در شکل نیز مشاهده میکنید متغیرهای حالت  $x(t)$  در زمان  $t = 3$  به نقطه موردنظر نمی رسد اما از اطلاعات بدست آمده در انتهای مسیر در مرحله اول با توجه به رابطه (۳-۲۶) میتوان در یک مرحله به شرط اولیه موردنظر برای متغیر هم حالت  $\psi(0)$  رسید این مقدار برابر شده است. همچنین میتوان با استفاده از متغیر هم حالت  $\psi(t)$  که از حل معادله دیفرانسیل عادی (ODE) رابطه (۳-۲۴) بدست آمده است و همچنین رابطه (۳-۸) ورودی کنترلی  $u(t)$  را بدست آورد. در شکل (۳-۴) میتوان این ورودی کنترلی بهینه را مشاهده نمود:



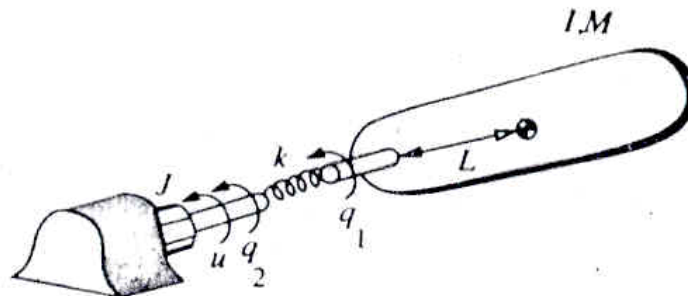
شکل (۳-۴): ورودی کنترل بهینه محاسبه شده برای سیستم خطی

### ۳-۴- کنترل بهینه سیستم های غیر خطی مستوی

در عمل معمولاً با سیستمهای غیر خطی برخورد داریم. رسیدن به جواب بهینه در این سیستمها به علت غیر خطی بودن آنها به آسانی سیستمهای خطی نیست. بطور مثال ما توانستیم براحتی نشان دهیم که در سیستمهای خطی تنها در یک مرحله به جواب میرسیم اما در سیستمهای غیرخطی این کار امکان پذیر نبوده و تنها میتوان در تعداد دفعات تکرار بیشتر بدنبال جواب مورد نظر بود.

### ۳-۴-۱- مثال عددی و شبیه سازی

در قسمت ۳-۴-۱- با یک مثال عددی از یک سیستم فیزیکی توانایی الگوریتم ارائه شده را نشان میدهم.



(۳-۵): بازوی قابل انعطاف [۲۳]

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل (۳-۵) را که تک بازوی قابل انعطاف (Flexible-Joint Link) است در نظر بگیرید. رفتار این سیستم مکانیکی را میتوان توسط یک دسته معادلات دیفرانسیل عادی از درجه ۴ بصورت  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  مدل کرد که در آن:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a \sin(x_1) - b(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

بطوری که  $a, b, c, d$  پارامترهای ثابتی بوده و از شرایط فیزیکی بازوی موردنظر بدست میاید.

$$a = \frac{MgL}{I}, \quad b = \frac{k}{I}, \quad c = \frac{k}{J}, \quad d = \frac{1}{I} \quad (3-34)$$

در رابطه (3-34) پارامترهای  $k, L, M$  همانطور که در شکل (3-5) نشان داده شده است بترتیب جرم، طول و ثابت فنر بازوی رباط و  $I, J$  گشتاور لختی یا همان ممان اینرسی آن است. حال همانند مثال قبلی در قسمت خطی مسئله بهینه سازی به این صورت مطرح میشود که گشتاور ورودی  $u(t)$  را در بازه زمانی  $[t_0, t_f]$  به گونه ای بیابیم که سیستم را از مقدار اولیه  $x(t_0) = x_0$  به  $x(t_f) = x_f$  منتقل کند و تابع هزینه

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

ماتریس  $m \times m$  مثبت معین است. در این مثال عددی  $R = 1$ ,  $Q = 3I_{4 \times 4}$  فرض شده است و زمان آغاز

$t_0 = 0$  و زمان پایان  $t_f = 3$  در نظر گرفته شده است و همچنین شرایط اولیه بصورت زیر است:

$$x(0) = [1 \quad 0.7 \quad 0.2 \quad 0.1]^T \quad (3-35)$$

$$x(3) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

برای حل ابتدا با توجه به اینکه بردار  $g$  در این مثال ثابت است رابطه (3-9) را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - gR^{-1}g^T \psi \\ \dot{\psi} = -Qx - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi \end{cases} \quad (3-36)$$

که در آن  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$  بصورت زیر تعریف میشود:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a \cos(x_1) - b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & -c & 0 \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

حال برای الگوریتم ارائه شده میبایست رابطه (3-17) را تعیین کنیم. بردارهای  $\psi(t), x(t)$  را بصورت

$$\psi(t) = [\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \psi_3(t) \quad \psi_4(t)]^T, \quad x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)]^T$$

توجه به اینکه  $z_1(t), z_2(t)$  در رابطه (3-17) ماتریسهای  $n \times n$  میباشد. اگر بطور مثال برای ماتریس  $z_1(t)$

فرم پخش ستونی  $z^i(t) = [z^1(t) \quad z^2(t) \quad z^3(t) \quad z^4(t)]$  را در نظر بگیریم (ستون  $i$ ام ماتریس

$z_1(t)$  است) خواهیم داشت  $\dot{z}_1(t) = A(.)z_1(t) = [A(.)z^1(t) \quad A(.)z^2(t) \quad A(.)z^3(t) \quad A(.)z^4(t)]$  و در

نتیجه:

$$\dot{z}^i(t) = A(\cdot)z^i(t), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3-38)$$

پس با توجه به خطی بودن قسمت‌های سوم و چهارم رابطه (3-17) نسبت به ماتریسهای  $z_1(t), z_2(t)$  همانطور که در رابطه (3-38) نیز نشان داده شد دینامیک معادله دیفرانسیل برای ستونهای  $z_1(t), z_2(t)$  یکی بوده و تنها در شرایط اولیه که در رابطه (3-25) نیز تعیین گشته است، متفاوت خواهند بود.

حال با تعریف ستونهای ماتریس  $z_1(t), z_2(t)$  بصورت  $z_1^i(t) = [z^{i11}(t) \ z^{i12}(t) \ z^{i13}(t) \ z^{i14}(t)]^T$  و  $z_2^i(t) = [z^{i21}(t) \ z^{i22}(t) \ z^{i23}(t) \ z^{i24}(t)]^T$  (3-38)، (3-36)، رابطه (3-17) را با توجه به رابطه (3-36)، (3-38) و  $y(t) \equiv \psi(t)$  بصورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = h(x(t), \psi(t)) \\ \dot{\psi}(t) = k(x(t), \psi(t)) \\ \dot{z}_1^i(t) = Z_1^i(x(t), \psi(t), z_1^i(t), z_2^i(t)) \\ \dot{z}_2^i(t) = Z_2^i(x(t), \psi(t), z_1^i(t), z_2^i(t)) \end{cases} \quad (3-39)$$

$$1 \leq i \leq n$$

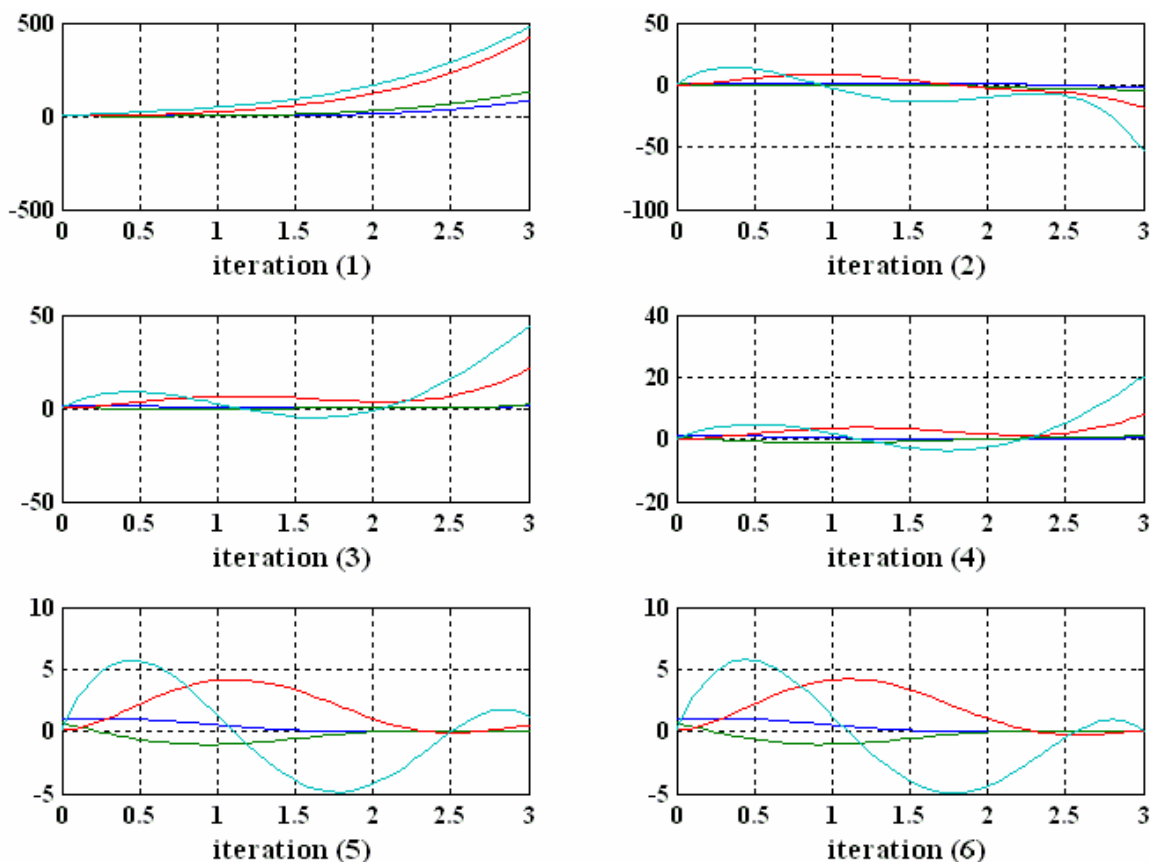
که در آن توابع  $h(x(t), \psi(t))$ ,  $k(x(t), \psi(t))$  براحتی از رابطه (3-36) بدست میاید و با استفاده از آن برای  $Z_1^i(x(t), \psi(t), z_1^i(t), z_2^i(t))$  و  $Z_2^i(x(t), \psi(t), z_1^i(t), z_2^i(t))$  خواهیم داشت:

$$Z_1^i(x(t), \psi(t), z_1^i(t), z_2^i(t)) = \begin{bmatrix} z^{i12} \\ (-a \cos(x_1) - b)z^{i11} + bz^{i13} \\ z^{i14} \\ c(z^{i11} - z^{i13}) - d^2 z^{i24} \end{bmatrix}, \quad (3-40)$$

$$Z_2^i(x(t), \psi(t), z_1^i(t), z_2^i(t)) = \begin{bmatrix} (-3 - a \sin(x_1)\psi_2)z^{i11} + (a \cos(x_1) + b)z^{i22} - cz^{i24} \\ -3z^{i12} - z^{i21} \\ -3z^{i13} - bz^{i22} + cz^{i24} \\ -3z^{i14} - z^{i23} \end{bmatrix}$$

آنچه که در این جا لازم به ذکر است این است که روابط (3-39) و (3-40) در اصل 4 معادله برای  $i$ های 1 تا 4 است.

حال با استفاده از شرایط اولیه رابطه (3-18) میتوان معادله دیفرانسیل عادی (ODE) (3-39) را حل نموده و از رابطه بازگشتی (3-20) نیز برای پیدا کردن شرط اولیه مناسب برای  $\psi(t)$  بهره میگیریم. نتایج عددی در شکل‌های بعدی مشاهده میشود.



شکل (۳-۶):  $x(t)$  در بازه  $0 < t < 3$

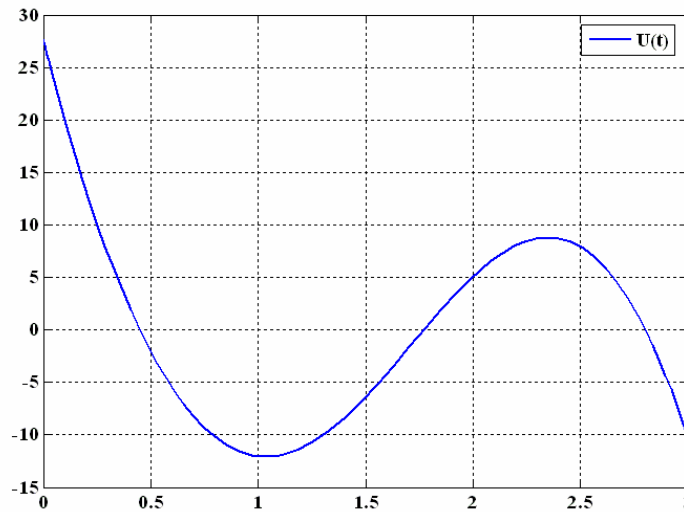
در شکل (۳-۶) مراحل بهبود شرط پایانی  $x(t)$  در زمان  $t_f = 3$  توسط تغییرات شرط اولیه متغیر هم حالت با استفاده از الگوریتم ارائه شده نشان داده شده است. همانگونه که انتظار داشتیم تعداد مراحل تکرار بیشتر از حالت خطی بوده که در این مثال خاص برابر ۶ است. مراحل تحول شرط اولیه  $\psi(t)$  و  $\|x(t_f) - x_f\|$  را در طی ۶ مرحله در جدول زیر مشاهده میکنید:

iteration	1	2	3	4	5	6
$\psi(t_0)$	$\begin{bmatrix} -50 \\ -50 \\ -50 \\ -50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 675.32 \\ -700.32 \\ -338.65 \\ -87.82 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 514.87 \\ -51.82 \\ -124.15 \\ -42.17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 297.04 \\ 50.76 \\ -49.84 \\ -20.10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 334.44 \\ -35.25 \\ -81.57 \\ -27.39 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 335.25 \\ -37.37 \\ -82.48 \\ -27.63 \end{bmatrix}$
$\ x(t_f) - x_f\ $	651.789	56.283	48.545	21.703	1.281	0.001

جدول (۳-۱)

در شکل (۳-۷) نیز گشتاور ورودی  $u(t)$  که حل مسئله بهینه سازی مربوطه است، نشان داده شده است.





شکل (۷-۳): گشتاور ورودی بهینه.

مقدار بهینه تابع هزینه  $J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^3 (x^T Q x + u^T R u) dt$  برای این گشتاور ورودی برابر  $204/99$  است. به بیان دیگر این مقدار هزینه مینیمی است که گشتاور ورودی میتواند سیستم را از مقدار اولیه  $x(t_0) = x_0$  به  $x(t_f) = x_f$  منتقل کند.

نکته:

۱. بدست آوردن سیگنال کنترل بهینه  $u(t)$  برای یک سیستم غیرخطی از درجه  $n$  تبدیل به حل  $n$  معادله دیفرانسیل خطی از درجه  $4n$  گردید که این  $n$  معادله دیفرانسیل تنها در شرایط اولیه با هم متفاوت بوده و از نظر دینامیک دارای ساختار یکسان که در رابطه (۳۹-۳) نیز مشخص است میباشد.
۲. از آنجایی که بهینه بودن سیگنالهای حالت دلیلی برای کراندار بودن آنها نمی باشد، می بایست در طی روشهای تکرار فرض بر کراندار بودن دامنه سیگنالهای خود بگذاریم. لازم به ذکر است که از شرط لبشیتز بودن دینامیک سیستم نمیتوان نتیجه گرفت که در بازه زمانی حل معادله دیفرانسیل عادی زمان فرار (Escape Time) نداریم.
۳. تعداد دفعات تکرار (Iterations) در سیستمهای غیر خطی وابستگی زیادی به طول بازه  $[t_0, t_f]$  دارد. علت آن است که با افزایش طول این بازه اولاً هم میزان پیچیدگی سیستم از نظر غیرخطی بودن سیستم به شرایط اولیه افزایش می یابد و ثانیاً با توجه به اینکه در مراحل اول الگوریتم هنوز مقدار شرایط اولیه متغیر هم حالت  $\psi(t)$  فاصله زیادی با مقدار دقیق خود دارد در اثر افزایش طول بازه مشکلات عددی خود را مؤثرتر نشان خواهد داد.

## فصل چهارم

### طراحی کنترل بهینه در روش خطی سازی فیدبک

در این فصل ابتدا مقدمه ای درباره روش کنترلی خطی سازی فیدبک برای سیستمهای غیرخطی بیان میکنیم. هدف در این قسمت این است که روش خطی سازی فیدبک در ورودی-حالت و ورودی-خروجی را با توجه به این دیدگاه تعمیم دهیم و در میان مجموعه جوابهای گوناگونی که در طراحی خطی سازی فیدبک ارائه میشود جواب بهینه را با توجه به معیار مناسبی بدست آوریم. در همین راستا ابتدا الگوریتم پیشنهادی را معرفی میکنیم و نحوه پیاده سازی آنرا مرحله به مرحله بیان میکنیم. در ادامه نیز در جهت نشان دادن توانایی این الگوریتم، در قسمت شبیه-سازی آن را بر روی یک سیستم فیزیکی اعمال میکنیم و نتایج آن را با الگوریتم رایج LQR مقایسه میکنیم. همچنین روش ارائه شده را با الگوریتم عددی بهینه-سازی (Particle Swarm Optimization) PSO مقایسه میکنیم.

## ۴-۱- مسئله کنترل حلقه بسته

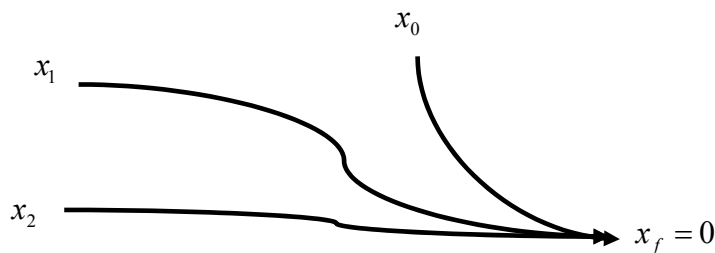
سیستم غیر خطی و مستوی (Input Affine) زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x) \quad (۴-۱)$$

که در آن  $x$  بردار حالت  $n$  بعدی و  $f, g$  میدانهای برداری هموار در  $R^n$  میباشند.  $u(x)$  نیز ورودی کنترلی اسکالر میباشد. حال هدف این است که  $u(x)$  کنترلی که تابعی از متغیرهای حالت است، را بگونه ای بیابیم که سیستم را همان طور که در شکل (۴-۱) مشاهده میکنید، از هر مقدار اولیه  $x(t_0) = x_0$  به مبدأ مختصات ( $x(t_f) = 0$ ) منتقل کند و تابع هزینه

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Gamma(x, u) dt \quad (۴-۲)$$

کمینه شود.



شکل (۴-۱): نمودار انتقال سیستم از شرایط اولیه دلخواه به مبدأ

## نکته

- آنچه که میبایست به عنوان تفاوت اصلی کنترل حلقه بسته با کنترل حلقه باز مد نظر داشت ماهیت سیگنال کنترلی  $u$  میباشد. در فصل قبلی (در قسمت کنترل حلقه باز) سیگنال ورودی  $u(t)$  بوده و تابعی بر حسب زمان است اما در این فصل (در قسمت کنترل حلقه بسته) سیگنال ورودی  $u(x)$  بوده و تابعی بر حسب متغیرهای حالت  $x$  است.
- اهمیت طراحی در حالت کنترل حلقه بسته به مراتب بیشتر از کنترل حلقه باز میباشد و علت آن است که در عمل در بسیاری از موارد فیدبک کنترلی از متغیرهای حالت داشتن، موضوع پیاده سازی را به مراتب ساده تر و عملی تر میکند. یکی دیگر از دلایل مهم ماهیت فیدبک است که امکان تضعیف اختلالها و مقاوم نمودن سیستم نسبت به نامعینیها را فراهم می کند.

۳. در کنترل حلقه بسته معمولاً هدف رسیدن به مبدأ بوده و محدودیتی برای  $t_f$  گذاشته نمیشود و آن را آزاد در نظر میگیرند. از این رو در مسائل مطرح شده در این فصل نیز  $t_f$  را دقیقاً ثابت نمیکنیم و برای رسیدن به رفتاری مطلوب از طریق تعریف و بهینه سازی تابع هزینه (۲-۴) اقدام میکنیم.
۴. یکی از امکانات و توانایی که در این قسمت نسبت به قسمت قبلی (حلقه باز) داریم این است که در رابطه (۲-۴) تابع هزینه تنها محدود به یک فرم خاص درجه دو (Quadratic) نمیشود و تنها محدودیت برای ما هموار بودن (Smoothness) این تابع هزینه خواهد بود.
۵. حل این مسئله براحتی قابل تعمیم خواهد بود به بدست آوردن سیگنال کنترلی  $u(x)$  که تابعی از متغیرهای حالت است و حالت‌های سیستم را از مقدار اولیه  $x(t_0) = x_0$  به مقدار نهایی غیر صفر  $x(t_f) = x_f$  منتقل کند در حالیکه تابع هزینه (۲-۴) کمینه میگردد. این امر با تغییر متغیر  $x(t) \rightarrow (x(t) - x_f)$  در مسئله مطرح شده امکان پذیر میشود.
۶. و نکته آخر مسئله ردیابی (Tracking) است. در این زمینه نیز کفایت تا همانند نکته ۵ با تغییر متغیر  $x(t) \rightarrow (x(t) - x_d(t))$  سیگنال کنترلی  $u(x, x_d, t)$  بگونه‌ای بدست آوریم تا حالت‌های سیستم را از مقدار اولیه  $x(t_0) = x_0$  شروع به حرکت کرده و سیگنال دلخواه  $x_d(t)$  را دنبال کند در حالیکه تابع هزینه (۲-۴) کمینه میگردد.
- حال قبل از شروع به مسئله بهینه سازی میبایست مروری بر روشهای ارائه شده برای کنترل حلقه بسته یک سیستم غیرخطی داشته باشیم. در این فصل ما در ابتدا به روشهای کنترل غیرخطی میپردازیم و مسئله بهینه سازی معرفی میشود. سپس الگوریتمی در جهت بهینه کردن آن روشها همراه با روند مرحله به مرحله ارائه میشود.

#### ۴-۲- خطی سازی ورودی-حالت (Input-State Linearization)

تعریف: سیستم غیر خطی و مستوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (۴-۳)$$

که در آن  $x$  بردار حالت  $n$  بعدی و  $f, g$  میدانهای برداری هموار در  $R^n$  میباشند. این سیستم را قابل خطی سازی ورودی-حالت (Input-State Linearization) گوئیم اگر تبدیل دیفئومورفیسم  $T$  و توابع  $\beta(x), \alpha(x)$  موجود باشد به طوری که  $T: D_x \rightarrow R^n$  و  $D_z = T(D_x)$  حاوی مبدأ باشد و تغییر مختصات  $z = T(x)$  و کنترل  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  سیستم (۳-۴) را بصورت

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (۴-۴)$$

درآورد به طوری که:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

حال مسئله مهم چگونه پیدا کردن  $\beta(x), \alpha(x)$  و  $T$  است. قبل از شروع نیاز به تعاریفی از هندسه دیفرانسیل میباشد.

#### 4-2-1- تعاریفی از هندسه دیفرانسیل

تعریف مشتق لی (Lie Derivative)

فرض کنید  $f: R^n \rightarrow R^n$  یک میدان برداری هموار و  $f: R^n \rightarrow R$  یک تابع اسکالر هموار باشد. مشتق لی  $h$  نسبت به  $f$  بصورت زیر تعریف میشود:

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f = (\nabla h)^T \cdot f$$

که میتوان آن را به اندازه تصویر  $\nabla h$  در جهت  $f$  تعبیر نمود که به آن مشتق جهتی  $h$  در راستای  $f$  هم گویند. برای مشتقات لی از درجات بالاتر میتوان از نماد گذاری زیر استفاده نمود:

$$L_f(L_{f^{i-1}} h) \equiv L_{f^i} h$$

مفهوم کروشه لی (Lie Bracket)

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \quad (4-6)$$

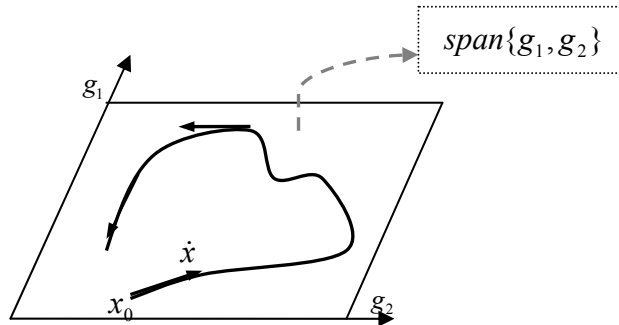
که در آن  $g_i(x) \in R^n$  و  $u_i \in R$  است. به این سیستم در اصطلاح (driftless) میگویند چون در صورتی که به  $u_i$ ها بصورت ورودی نگاه کنیم و  $u_i \equiv 0$  آنگاه  $\dot{x} = 0$  است و در نتیجه حالت سیستم در نبود ورودی تغییری (drift) نخواهد داشت. حال فرض میکنیم  $g_i$ ها بردارهای ثابتی باشند در نتیجه

$$\dot{x} \in \text{span}\{g_1, g_2\} \quad (4-7)$$

و با توجه به رابطه (4-7) خواهیم داشت:

$$\text{if } x(t_0) \in \text{span}\{g_1, g_2\} \Rightarrow x(t) \in \text{span}\{g_1, g_2\}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (4-8)$$

شکل (4-2) رابطه (4-8) را بخوبی نشان میدهد:

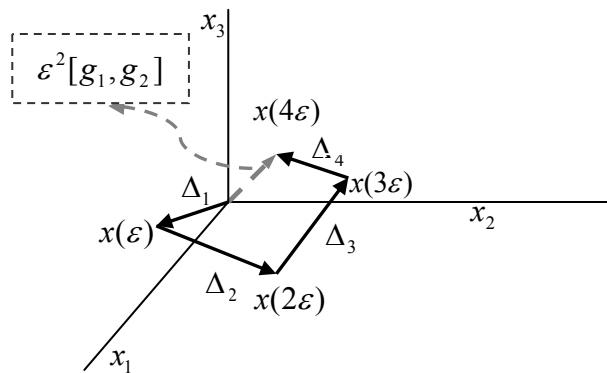


شکل (۲-۴): مسیر حرکت  $x(t)$  وقتی  $g_1, g_2$  ثابت باشند

حال فرض میکنیم که بردارهای  $g_i$  بردارهای ثابتی نباشند و ورودی های  $u_1, u_2$  را در بازه های زمانی مختلف بصورت زیر تعریف میکنیم:

- (1)  $u_1(t) = 1, u_2(t) = 0, t \in [0, \varepsilon[$
- (2)  $u_1(t) = 0, u_2(t) = 1, t \in [\varepsilon, 2\varepsilon[$
- (3)  $u_1(t) = -1, u_2(t) = 0, t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon[$
- (4)  $u_1(t) = 0, u_2(t) = -1, t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon[$

با فرض  $x(0) = 0$  و با توجه به رابطه (۶-۴) در  $\varepsilon$  بازه زمانی مختلف با ورودی های  $u_1, u_2$  تعریف شده در (۹-۴) و با تقریب درجه خطی داریم:



شکل (۳-۴): سوی تغییرات  $x(t)$  در حالت کلی

در بازه زمانی اول  $\Delta_1 \cong \varepsilon g_1$

در بازه زمانی دوم  $\Delta_2 \cong \varepsilon(g_2 + \frac{\partial g_2}{\partial x}(\varepsilon g_1))$

در بازه زمانی سوم  $\Delta_3 \cong -\varepsilon(g_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x}(\varepsilon g_1))$

در بازه زمانی چهارم  $\Delta_4 \cong -\varepsilon(g_2 + \frac{\partial g_2}{\partial x}(\varepsilon g_1) + \frac{\partial g_2}{\partial x}(-\varepsilon g_1))$

با توجه به تقریبهای بالا میتوان به این نتیجه رسید که  $x(4\varepsilon) = \sum_{i=1}^4 \Delta_i \cong \varepsilon^2 \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 \right)$  یعنی وقتی  $g_i(x)$  به  $x$  بستگی دارد میتواند در جهتی جدید که توسط  $\left( \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 \right) \equiv [g_1, g_2]$  مشخص میشود از فضای  $\text{span}\{g_1(x), g_2(x)\}$  خارج شود.

## حالت کلی

فرض کنید  $f, g$  دو میدان برداری باشند آنگاه کروشه لی  $f, g$  به صورت زیر تعریف میشود:

$$[f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g \quad (4-10)$$

کروشه لی دو میدان برداری خود نیز میدان برداری است. نماد گذاری دیگری برای کروشه لی در مراجع وجود دارد که امکان تکرار نمودن آنرا فراهم می‌سازد:

$$[f, g] = ad_f g$$

$$[f, ad_{f^{-1}} g] = ad_{f^{-1}} g$$

## برخی خواص کروشه لی [۲۴]

۱. خاصیت ضد جابجایی (Skew Symmetric)

$$[f, g] = -[g, f] \quad (4-11)$$

۲. اتحاد ژاکوبی (Jacobi Identity)

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (4-12)$$

۳. خاصیت زنجیره ای (Chain Rule)

$$[\alpha(x)f, \beta(x)g] = \alpha(x)\beta(x)[f, g] + \alpha(x)(L_f \beta(x))g - \beta(x)(L_f \alpha(x))f \quad (4-13)$$

حال باز میگردیم به مسئله خطی سازی:

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v \quad \text{که } \beta(x), \alpha(x) \text{ توابع و } z = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix} \text{ فرض کنید}$$

معادلات  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  را به فرم  $\dot{z} = Az + Bv$  در آورد که پارامترهای  $B, A$  در رابطه (۴-۵) معرفی شده اند. در نتیجه با توجه به رابطه (۴-۵) خواهیم داشت:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1(x) \\ \dot{z}_2(x) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(x) \\ \dot{z}_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \\ v \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

از جانب دیگر داریم:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} \dot{x} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} \dot{x} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} (f(x)x + g(x)u) \\ \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} (f(x)x + g(x)u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_f T_1) + (L_g T_1)u \\ (L_f T_2) + (L_g T_2)u \\ \vdots \\ (L_f T_n) + (L_g T_{n-1})u \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

از تساوی روابط (4-14) و (4-15) میتوان شرط لازم و کافی برای دیفئومورفیسم  $z = T(x)$  را بدست آورد:

$$\begin{cases} L_g T_1 = 0 \\ L_g T_2 = 0 \\ \vdots \\ L_g T_{n-1} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} T_2 = L_f T_1 \\ T_3 = L_f T_2 \\ \vdots \\ T_n = L_f T_{n-1} \end{cases} \quad (4-16)$$

روابط (4-16) و (4-15) را میتوان به صورت ساده تری نیز نوشت:

$$L_g T_1 = L_g L_f T_1 = \dots = L_g L_{f^{n-2}} T_1 = 0 \quad (4-17)$$

$$L_g L_{f^{n-1}} T \neq 0$$

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$$

$$\alpha(x) = \frac{-L_{f^n} T_1}{L_g L_{f^{n-1}} T_1}, \quad \beta(x) = \frac{-1}{L_g L_{f^{n-1}} T_1} \quad (4-18)$$

اگر معادلات (4-17) برای  $T_1(x)$  جواب داشته باشد آنگاه مسئله خطی سازی فیدبک حل شده است.

#### چند تعریف [24]

۱. یک مجموعه از میدانهای برداری بصورت  $\{f_1, \dots, f_k\}$  روی  $R^n$  را یک توزیع (Distribution) میگویند.

۲. یک توزیع مستقل خطی  $\{f_1, \dots, f_k\}$  را روی  $R^n$  را کاملاً انتگرال پذیر (Completely Integrable) گویند اگر و فقط اگر  $n-k$  تابع اسکالر و مستقل خطی  $h_i(x)$  موجود باشد بطوریکه:



$$L_{f_j} h_i = \nabla h_i \cdot f_j = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n-k$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

۳. توزیع مستقل خطی  $\{f_1, \dots, f_k\}$  را Involutive میگوییم اگر و تنها اگر توابع اسکالر  $\alpha_{ij} : R^n \rightarrow R$  موجود باشد به نحوی که:

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{p=1}^k \alpha_{ijp}(x) f_p \quad (۱۹-۴)$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, k$$

رابطه (۱۹-۴) معادل این است که  $Rank\{f_1, f_2, \dots, f_k, [f_i, f_j]\} = Rank\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

### قضیه فروبنیوس (Frobenius Theorem)

توزیع مستقل خطی  $\{f_1, \dots, f_k\}$  روی  $R^n$  کاملاً انتگرال پذیر (Completely Integrable) است اگر و فقط اگر Involutive باشد [۲۴].

### ۴-۲-۲- قضیه خطی سازی فیدبک

سیستم غیر خطی و مستوی  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  را در نظر بگیرید. این سیستم قابل خطی سازی ورودی حالت می باشد اگر و تنها اگر یک ناحیه  $\Omega$  موجود باشد بطوریکه:

۱. توزیع  $\{g, ad_f g, \dots, ad_{f^{n-1}} g\}$  در  $\Omega$  مستقل خطی باشد.

۲. توزیع  $\{g, ad_f g, \dots, ad_{f^{n-2}} g\}$  در  $\Omega$  Involutive باشد [۲۴].

نکته

در حالت خطی  $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu$  شروط قضیه خطی سازی فیدبک به صورت زیر می گردند:

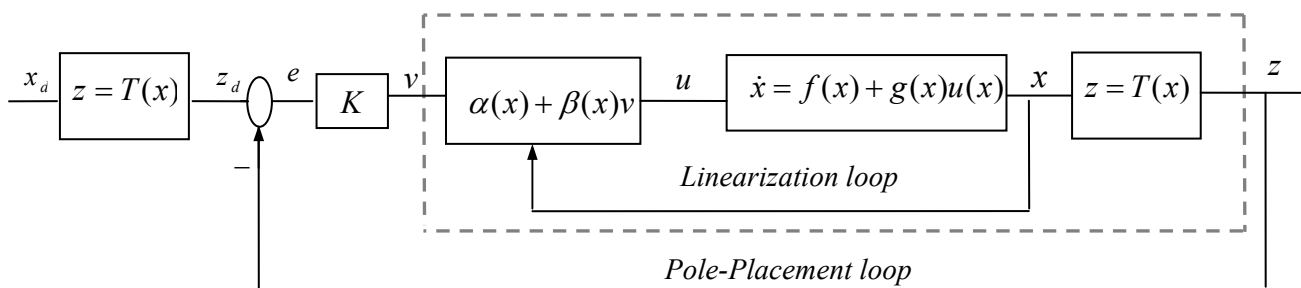
۱. شرط اول به  $Rank[G \quad FG \quad \dots \quad F^{n-1}G] = n$  تبدیل میشود که همان شرط کنتری پذیری است.

۲. شرط دوم همواره برقرار است زیرا ماتریسهای  $F$  و بردار  $G$  ثابت بوده و مشتق لی هر دو بردار ثابت صفر خواهد بود.

### ۴-۲-۳- روند انجام خطی سازی ورودی-حالت

۱. با توجه به معادله (۳-۴) بردارهای  $\{ad_{f^i} g\}_{i=0}^{i=n-1}$  محاسبه میشود.

۲. شرطهای ۱ و ۲ قضیه خطی سازی فیدبک چک میشود.
۳. اگر شرایط برقرار بود رابطه  $T_1(x)$  را از (۴-۱۷) بدست میآوریم.
۴.  $\beta(x), \alpha(x)$  را از رابطه (۴-۱۸) حساب کرده و سیگنال کنترلی  $u$  را بدست میآوریم.



شکل (۴-۴): نمودار جعبه‌ای سیستم کنترل حلقه بسته در خطی سازی ورودی-حالت

شکل (۴-۴) دیاگرام الگوریتم خطی سازی بهمراه کنترل کننده حلقه بسته آن را نشان میدهد. حال مسئله پایداری در سیستم با خطی سازی آن و انتقال آن از فضای غیر خطی  $x$  در (۴-۳) به فضای خطی  $z$  در (۴-۴) به کمک دیفئومورفیسم  $z = T(x)$  براحتی قابل بررسی و دستیابی است منوط به طراحی  $v$  به صورت

$$v = -Ke \quad (4-20)$$

به طوری که  $K$  یک بردار متعلق به  $R^n$  است و همه قطبهای ماتریس  $(A-BK)$  در نیمه سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرد. با اینکه طراحی کنترل کننده (۴-۲۰) در سیستم (۴-۴) با شرط ذکر شده در مورد ماتریس  $(A-BK)$  پایداری سیستم (۴-۳) را تضمین میکند اما هرگز نمیتوان از رفتاری مطلوب در سیستم (۴-۴) رفتاری مطلوب در سیستم (۴-۳) را مستقیماً نتیجه گرفت. به عنوان مثال هدف در طراحی LQR برای سیستمهای خطی، تعیین  $K$  در رابطه (۴-۲۰) برای سیستم (۴-۴) است بطوری که تابع هزینه

$$J_z = \int_0^{\infty} (z^T \bar{Q} z + v^2) dt \quad (4-21)$$

بهینه گردد که در آن ماتریس  $n \times n$  مثبت معین است. اما آنچه که برای ما مهم میباشد رفتار سیستم (۴-۳) است زیرا  $z$  در سیستم (۴-۴) یک متغیر مجازی بوده در حالی که سیستم حقیقی و فیزیکی ما سیستم (۴-۳) است. علت نامگذاری تابع هزینه در (۴-۲۱) با اندیس  $z$  نیز در جهت تأکید مجدد بر این امر است که طراحی LQR که در جهت کمینه کردن این تابع هزینه است لزوماً رفتار مناسب سیستم در فضای حقیقی  $x$  را نتیجه نمیدهد. به بیان دیگر بهینه کردن (۴-۲۱) منجر به بهینه کردن تابع هزینه

$$J_x = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^2) dt \quad (4-22)$$

نمیگردد. در این قسمت قصد داریم که تابع هزینه (4-22) را تحت محدودیت دینامیکی (4-3) کمینه کنیم در حالی که سیگنال کنترلی ما از قرار دادن رابطه (4-20) در (4-18) بدست میاید. به بیان دیگر با استفاده از روش خطی سازی فیدبک سیستم (4-3) را خطی کرده و ضریب  $K$  را در (4-20) بگونه ای بدست میاوریم تا بهینه بودن رابطه (4-22) را تضمین نماید و نتایج را با روش رایج LQR مقایسه میکنیم.

**نکته**

- راه حل ارائه شده در این قسمت محدود به فرم تابع هزینه که در این جا از نوع درجه دو است نخواهد بود و میتوان با تعریف مناسب تر توابع هزینه دیگر به دنبال رفتارهای دیگری از سیستم بود که در ادامه به این موضوع پرداخته میشود. تنها محدودیت ما هموار بودن تابع هزینه و لیپ-شیتز (Lipschitz) بودن  $f, g$  در (4-3) است (لیپ-شیتز بودن یکتایی جواب را نتیجه میدهد).

### 4-3- الگوریتم بهینه سازی [32]

با یافتن سیگنال کنترلی  $u$  از طریق قرار دادن رابطه (4-20) در (4-18) و با در نظر گرفتن دینامیک سیستم در (4-3) خواهیم داشت:

$$\dot{x} = F(x, K) \quad (4-23)$$

که در آن  $K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$  برداری است که ضرایب ثابت کنترل کننده ما را در بر دارد. حال تابع هزینه در حالت کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$J = \int_0^{T_f} \Gamma(x, K) dt \quad (4-24)$$

که در آن  $\Gamma$  تابعی است از  $R^{2n}$  به  $R$ . فرض میکنیم که مقدار اولیه  $x_0 = x(t)|_{t=0}$  معلوم باشد. هدف پیدا کردن ضریب ثابت  $K$  است بنحوی که تابع هزینه  $J$  در (4-24) بهینه گردد.

**نکته**

- اگر  $K$  ضریب ثابت نبود و با زمان تغییر میکرد مسئله تبدیل به یک مسئله معمول کنترل بهینه میشد که قبلاً در فصل دوم به آن پرداخته شده بود. اما اکنون محدودیت ثابت بودن این ضرایب این مسئله را چالش انگیزتر میکند.

متغیر جدید  $x_{n+1}$  را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t \Gamma(x(\tau), K) d\tau \quad (4-25)$$

با توجه به رابطه (4-25) بدیهی است که  $x_{n+1}(0) = 0$  و  $x_{n+1}(T_f) = J$  که همان تابع هزینه در رابطه (4-23) است که قرار است کمینه شود. بعلاوه با توجه به (4-25) برای  $0 < t < T_f$  داریم:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \Gamma(x(t), K) \quad (4-26)$$

از ترکیب (4-23) و (4-26) خواهیم داشت:

$$\dot{X}(t) = H(X(t), K) \quad (4-27)$$

که در آن برداری متعلق به  $R^{n+1}$  و به صورت زیر تعریف میشود:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

و  $H(X, K)$  تابعی است از  $R^{(2n+1)}$  به  $R^{n+1}$  که به صورت زیر تعریف میشود:

$$H(X(t), K) = \begin{bmatrix} F(x(t), K) \\ \Gamma(x(t), K) \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

حال برای معادله دیفرانسیل (4-27) شرط اولیه  $X_0 = \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \end{bmatrix}$  و زمان نهایی  $T_f$  را داریم. با تعاریفی که انجام شد میتوان مسئله بهینه سازی را به اینگونه معرفی نمود که در معادله دیفرانسیل عادی (4-27) با شرط اولیه  $X_0 = \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ ،  $K$  را بگونه ای بیابیم تا  $x_{n+1}(T_f) = J$  کمینه شود.

برای رسیدن به جواب ماتریس  $W$  بصورت

$$W = \frac{\partial X}{\partial K} \quad (4-30)$$

را تعریف کنید که در آن  $W \in R^{(n+1) \times n}$  و دارای فرم زیر است:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial K_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial K_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial K_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial K_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial K_1} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial K_n} \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

حال با مشتق گرفتن طرفین رابطه (4-27) نسبت به  $K$  داریم:

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial K} = \frac{\partial H(X, K)}{\partial X} \times \frac{\partial X}{\partial K} + \frac{\partial H(X, K)}{\partial K} \quad (4-32)$$

با توجه به تعریف (۴-۳۰) و اینکه میتوان جای مشتقگیری نسبت به زمان و  $K$  را در رابطه (۴-۳۲) عوض نمود (  $\frac{\partial \dot{X}}{\partial K} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial X}{\partial K} \right) = \frac{d}{dt} W$  ) خواهیم داشت:

$$\dot{W} = \frac{\partial H(X, K)}{\partial X} \times W + \frac{\partial H(X, K)}{\partial K} \quad (4-33)$$

در مورد معادله (۴-۳۳) نکات مهم وجود دارد که میبایست مدنظر داشت:

#### نکته

۱. معادله دیفرانسیلی (۴-۳۳) یک معادله دیفرانسیل ماتریسی است. به بیان دیگر معادله (۴-۳۳) را می توان بصورت  $n$  معادله دیفرانسیل از درجه  $n+1$  در نظر گرفت که هر کدامیک از این معادلات دیفرانسیل درجه  $n+1$  یک ستون معادله ماتریسی (۴-۳۳) را شامل میشود.

۲. شرط اولیه برای معادله دیفرانسیل ماتریسی (۴-۳۳)  $W(0) = 0$  است زیرا متغیر  $X(t)$  در زمان  $t_0 = 0$  همان طور که در قبل نیز بیان شد مستقل از  $K$  میباشد چون تغییرات پارامتر  $K$  تأثیری بروی متغیر حالت  $X(t)$  در لحظه ابتدایی نخواهد گذاشت.

۳. نکته آخر که هدف اصلی ما از تعریف ماتریس  $W$  در رابطه (۴-۳۰) بود این است که سطر آخر ماتریس  $W$  یعنی سطر  $n+1$ م گرادیان تابع هزینه  $J$  نسبت به پارامتر  $K$  را نشان میدهد. به بیان دیگر تغییرات رفتاری تابع هزینه خود را میتوانیم از طریق سطر آخر ماتریس  $W$  دنبال کنیم و این نکته اصلی الگوریتم ارائه شده در این فصل است.

با توجه به نکاتی که در بالا گفته شد میتوانیم برای شروع از مقدار اولیه مناسبی برای  $K$  (بطور مثال  $K_0 = K_{lqr}$  که در آن برداری است که براحتی با استفاده از دستور `lqr` در برنامه `Matlab` بدست میاید) استفاده کنیم. مناسب در اینجا بدین معنی است که مقادیر ویژه ماتریس  $(A - BK_0)$  تماماً در سمت چپ محور اعداد مختلط قرار داشته باشد. سپس میتوانیم با الهام گرفتن از روش کاهش گرادیان مقدار پارامتر  $K_i$  را بدین گونه بهبود بخشید:

$$K_{i+1} = K_i - \mu W_i^n \quad (4-34)$$

که در آن آخرین سطر ماتریس  $W$  در زمان  $T_f$  است و ماتریس  $\mu$  یک ماتریس مثبت معین میباشد که به کمک آن میتوانیم طول و همچنین جهت گامهای خود را در یافتن ضریب  $K$  تنظیم کنیم.

### ۴-۳-۱- روند مرحله به مرحله الگوریتم بهینه سازی خطی سازی ورودی-حالت

- مرحله اول: مقدار اولیه دلخواهی برای ضریب  $K$  انتخاب میکنیم به طوری که مقادیر ویژه ماتریس  $(A - BK_0)$  تماماً در سمت چپ محور اعداد مختلط قرار داشته باشد.
- مرحله دوم: معادلات دیفرانسیل (۴-۳۳) و (۴-۲۳) را با شرایط اولیه  $X_0 = \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $W(0) = 0$  بطور همزمان حل میکنیم. این معادلات شامل  $n+1$  مجهول  $X(t)$  و  $n(n+1)$  مجهول  $W$  میباشد و از جانب دیگر در رابطه (۴-۲۳)  $n+1$  معادله و در رابطه (۴-۳۳)  $n(n+1)$  معادله داریم. در نتیجه دارای یک دستگاه  $(n+1)^2$  معادله دیفرانسیل و  $(n+1)^2$  مجهول هستیم.
- مرحله سوم: پس از حل معادلات دیفرانسیلی عادی بالا با استفاده از اطلاعات بدست آمده در زمان  $T_f$  و از طریق رابطه (۴-۳۴) ضریب  $K$  مورد نظر را بهبود میبخشیم.

در مراحل الگوریتم بالا می‌بایست نکات زیر را در نظر داشت:

نکته

۱. در هر دفعه تکرار که یک  $K_i$  بدست می‌آوریم در مقابل یک  $J_i$  نیز خواهیم داشت. در مثالهای شبیه سازی ارائه شده روند بهبود ضرایب  $K_i$  به این صورت است که در رابطه (۴-۳۴) ماتریس  $\mu$  بگونه ای انتخاب میشود که دنباله متناظر اعداد  $J_i$  نزولی باشد که با توجه به فرض لیب-شیتز بودن معادله (۴-۲۳) که امکان تقریب خطی را برای تابع هزینه (۴-۲۲) نسبت به ضریب  $K$  فراهم میکند وجود ماتریس  $\mu$  همواره تضمین شده است.
۲. برای یک تابع هزینه مناسب بصورتی که همواره  $\Gamma(x, K)$  مثبت باشد میتوان همگرایی الگوریتم را تضمین نمود به این علت که اگر دنباله ای دارای کران پایین بوده و همواره نیز نزولی باشد همگرا خواهد بود.
۳. با توجه به اینکه فرض بر این است که  $K_0$  و ماتریس  $\mu$  در طول مراحل بالا بدرستی انتخاب میشود به این نتیجه میرسیم که سیستم (۴-۳) پایدار بوده و مسئله ای که در ابتدای این فصل به عنوان کنترل حلقه بسته مطرح شد که سیستم از هر مقدار اولیه  $x(t_0) = x_0$  به مبدأ مختصات  $(x(t_f) = 0)$  منتقل گردد برآورده میشود.

## ۴-۳-۲- مثال عددی و شبیه سازی

در این قسمت با یک مثال عددی از یک سیستم فیزیکی توانایی الگوریتم ارائه شده را نشان می‌دهیم. مجدداً سیستم مکانیکی فصل قبل را که تک بازوی قابل انعطاف (Flexible-Joint Link) است را در نظر بگیرید (شکل (۳-۵)). رفتار این سیستم مکانیکی با معادلات دیفرانسیل عادی از درجه ۴ زیر مدل میشود:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x) \quad (۴-۳۵)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a \sin(x_1) - b(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \quad (۴-۳۶)$$

که پارامترهای  $a, b, c, d$  از شرایط فیزیکی بازوی مورد نظر بدست می‌آید که روابط آن در رابطه (۳-۳۴) فصل قبل نشان داده شده است. با توجه به به رابطه (۴-۳۵) سیستم فیزیکی مربوطه در حالت بدون ورودی دارای نقطه تعادل  $x = 0$  میباشد به همین دلیل انتظار میرود که بتوان بوسیله سیگنال کنترلی با انرژی محدود سیستم را از هر شرط اولیه دلخواه به مبدأ مختصات انتقال دهیم.

حال برای بررسی امکان خطی سازی سیستم میبایست دو شرط قضیه خطی سازی فیدبک را چک کنیم:

$$ad_f g = [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} g = [0 \quad 0 \quad -d \quad 0]^T$$

$$ad_f^2 g = [f, ad_f g] = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot ad_f g = [0 \quad bd \quad 0 \quad -cd]^T \quad (۴-۳۷)$$

$$ad_f^3 g = [f, ad_f^2 g] = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot ad_f^2 g = [-bd \quad 0 \quad cd \quad 0]^T$$

با توجه به روابط (۴-۳۷) براحتی میتوان نتیجه گرفت که ماتریس  $[g \quad ad_f g \quad ad_f^2 g \quad ad_f^3 g]$  برای تمام  $x \in R^4$  دارای رتبه کامل است. از طرف دیگر از آنجایی که مجموعه بردارهای  $\{g \quad ad_f g \quad ad_f^2 g\}$  ثابت میباشند برای کل فضای  $R^4$  شرط Involutive بودن برقرار خواهد بود. در نتیجه هر دو شرط قضیه خطی سازی فیدبک آن هم بصورت سرتاسری ارضاء شده و سیستم قابل خطی سازی در کل فضای  $R^4$  میباشد. به بیان دیگر معادله (۴-۱۷) حتماً جوابی برای  $T_1(x)$  خواهد داشت. حال با بسط رابطه (۴-۱۷) میتوان روابط لازمی برای  $T_1(x)$  را بدست آورد که به شرح زیر است.

$$L_g T_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_4} = 0$$

$$L_g L_f T_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_4} \left\{ \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} [-a \sin(x_1) - b(x_1 - x_3)] + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} x_4 \right\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_3} = 0 \quad (4-38)$$

$$L_g L_{f^2} T_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} [-a \sin(x_1) - b(x_1 - x_3)] \right) x_4 \right\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_2} = 0$$

در نهایت با توجه به روابط (4-38) به این نتیجه می‌رسیم که  $T_1(x) = T_1(x_1)$ . به بیان دیگر تابع  $T_1$  تنها تابعی از متغیر  $x_1$  است. با توجه به اینکه میبایست  $T_1(0) = 0$  باشد  $T_1$  را در ساده‌ترین حالت ممکن یعنی  $T_1(x_1) = x_1$  در نظر می‌گیریم. از جانب دیگر شرط  $L_g L_{f^3} T_1(x_1) \neq 0$  نیز برقرار است. حال با قرار دادن رابطه  $v = -Kz$  در (4-18) داریم:

$$u = \frac{v - L_f^n T_1(x_1)}{L_g L_f^{n-1} T_1(x_1)} = \frac{-\sum_{i=1}^4 k_i z_i - L_f^4 T_1(x_1)}{L_g L_f^3 T_1(x_1)} \quad (4-39)$$

با توجه به دیفئومورفیسم  $z = T(x)$  و رابطه (4-16) داریم:

$$z_1 = T_1(x_1) = x_1$$

$$z_2 = L_f T_1(x_1) = x_2$$

$$z_3 = L_{f^2} T_1(x_1) = -a \sin(x_1) - b(x_1 - x_3)$$

$$z_4 = L_{f^3} T_1(x_1) = -ax_2 \cos(x_1) - b(x_2 - x_4)$$

با جایگذاری (4-40) در (4-39) سیگنال کنترلی  $u$  را بصورت تابعی از  $x$  و  $K$  بدست می‌آوریم. هدف بهینه‌سازی پیدا کردن  $K$  است تا تابع هزینه

$$J(K) = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^2(x, K)] dt \quad (4-41)$$

برای ماتریس ثابت و مثبت معین  $Q$  و تحت محدودیت دینامیکی (4-35) و (4-36) کمینه گردد.

### نکته

۱. برای تضمین پایداری میبایست مقادیر ویژه ماتریس  $(A - BK)$  تماماً در سمت چپ محور اعداد

مختلط قرار داشته باشد که بدین منظور محدودیت در دامنه جستجو ما برای  $K$  بهینه حاصل

میشود که به کمک جدول Routh-Hurwitz بصورت زیر فرمول بندی میشود:

$$k_4 k_3 k_2 - (k_2^2 + k_4^2 k_1) > 0$$

$$k_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

(4-42)



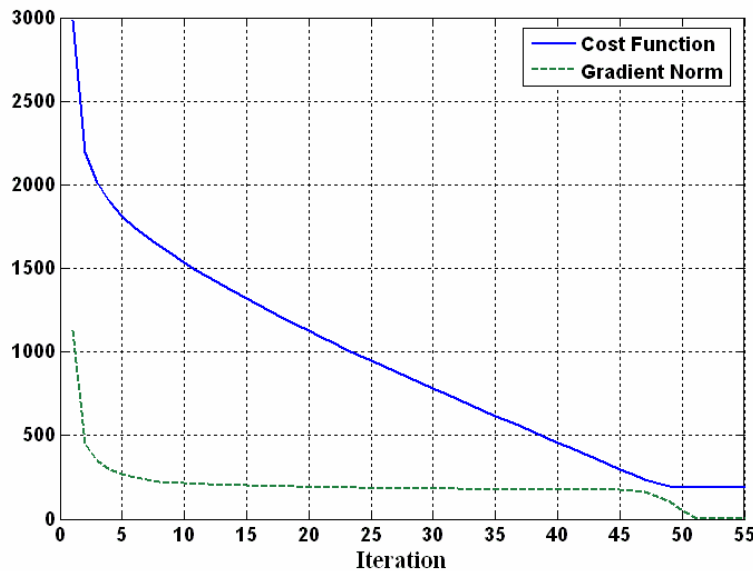
۲. با توجه به الگوریتم بهینه سازی ارائه شده و روابط (۴-۲۳) و (۴-۲۴) میتوان تعاریف زیر را انجام داد:

$$\begin{aligned} F(x, K) &= f(x) + g(x)u(x, K) \\ \Gamma(x, K) &= x^T Qx + u^2(x, K) \end{aligned} \quad (4-43)$$

که در آن  $f(x), g(x)$  در رابطه (۴-۳۶) داده شده و برای نتایج شبیه سازی  $Q = \beta I$  ( $\beta > 0$ ) در نظر گرفته شده است.

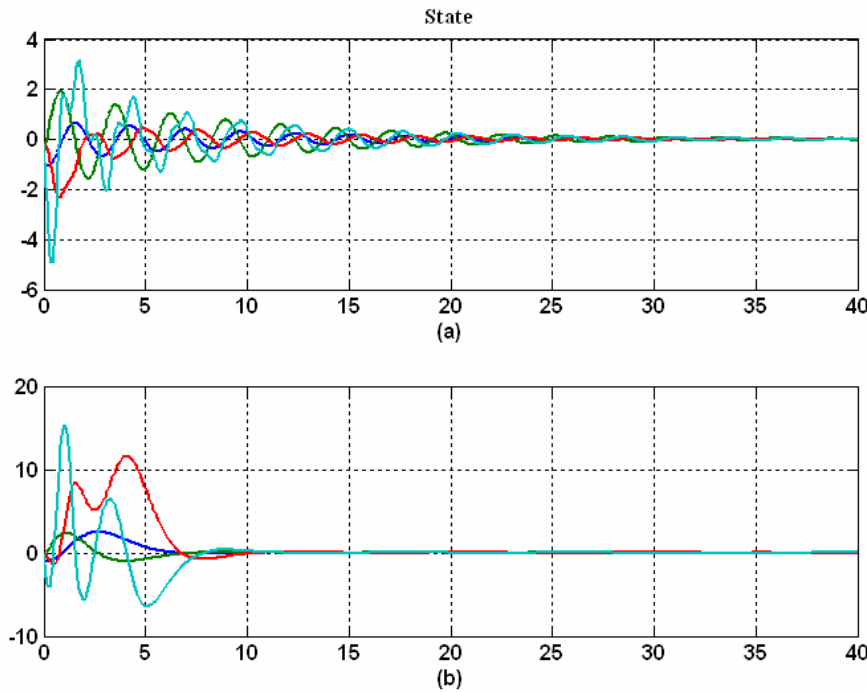
۳. نکته دیگری که یک بار دیگر به آن اشاره میشود این است که تابع هزینه در رابطه (۴-۴۱) لزومی ندارد که حتماً بصورت درجه دو تعریف شود و هر تابع هموار دیگری نیز قابل قبول است علت انتخاب تابع هزینه بصورت درجه دو در اینجا امکان مقایسه الگوریتم ارائه شده با الگوریتم LQR است

نتایج عددی شبیه سازی در حالی بدست آمده است که در تابع هزینه ماتریس  $Q = 3I$  است. همچنین شرط اولیه برای معادله (۴-۳۵)  $x_0 = (1 \ 0.7 \ 0.1 \ 0.2)^T$  و ماتریس گام در الگوریتم گرادیان  $\mu = 0.002I$  است. پارامترهای فیزیکی  $d, c, b, a$  با توجه به معیارهای فیزیکی به ترتیب 1, 0.1, 0.5, 5 تخمین زده شده است. مقدار اولیه برای  $K_0$  نیز مقدار دلخواه است بطوری که شرط (۴-۴۲) را برآورده سازد. همچنین از آنجایی که در رابطه (۴-۴۱) عملی نیست از  $T_f = 40$  به عنوان زمان پایانی شبیه سازی استفاده شده است. شکلهای زیر نتایج عددی را نشان میدهد.



شکل (۴-۵): تغییرات تابع هزینه  $J$  و اندازه گیری بردار گرادیان آن

شکل (۴-۵) تغییرات تابع هزینه  $J_x$  و اندازه بردار گرادیان این تابع هزینه یعنی  $\left\| \frac{\partial J_x}{\partial K} \right\|$  را نسبت به دفعات تکرار نشان میدهد. در طول حدوداً ۵۲ مرحله اندازه بردار گرادیان تابع هزینه به اندازه کافی کوچک شده است که میتوان الگوریتم را متوقف کرد.  $K_{opt} = [13.806, 20.722, 8.677, 3.934]$  ضریب بهینه کنترل کننده مورد نظر میباشد که توسط آن کمینه تابع هزینه  $J_x$  برابر  $J_{opt} = 188.83$  است. برای مقایسه این نتیجه با الگوریتم رایج LQR با استفاده از دستور lqr در Matlab برای تابع هزینه مشابه با  $\beta$  یکسان بردار ضریب کنترل کننده  $K_{LQR} = [1.732, 4.943, 6.189, 3.921]$  را بدست می آید. تابع هزینه  $J_x$  برای  $K_{LQR}$  برابر  $J_{LQR} = 1630.8$  است که این نشان میدهد که الگوریتم ارائه شده توانسته است نتایج بدست آمده از الگوریتم کلاسیک LQR را تا ۹ برابر بهبود بخشد. این تفاوت فاحش از این امر نشئت میگیرد که الگوریتم LQR تنها به بهبود تابع هزینه در فضای مجازی  $z$  نگاه میکند و این موضوع نمیتواند رفتار مناسب سیستم را در فضای حقیقی و فیزیکی  $x$  تضمین نماید. پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته و سیگنال کنترلی مربوطه برای دو روش طراحی ذکر شده در شکل‌های (۴-۶) و (۴-۷) آورده شده است.

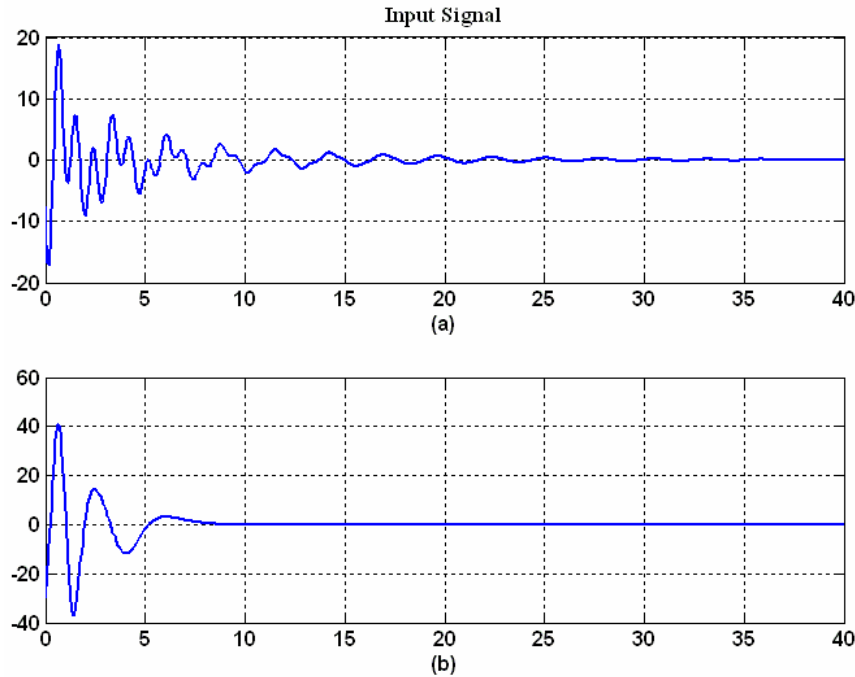


شکل (۴-۶): نمودار پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با (a) کنترل کننده پیشنهادی و (b) کنترل کننده LQR

شکل (۴-۶) نمودار پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته را در حالتی که ضریب کنترل کننده از طریق الگوریتم ارائه شده بدست آمده نشان میدهد و در مقابل در شکل (۴-۶-b) نمودار پاسخ زمانی حلقه بسته سیستم برای ضریب کنترل کننده  $K_{LQR}$  را میتوان مشاهده کرد. با مقایسه این دو براحتی میتوان دریافت که دامنه

تغییرات متغیرهای حالت ما تا چندین برابر بهبود یافته است. این وضعیت برای سیگنال کنترلی  $u$  نیز صادق است.

شکل (a-7-ε) و (b-7-ε) بترتیب نمودار سیگنال کنترلی برای ضریب کنترل کننده بدست آمده از الگوریتم ارائه شده و  $K_{LQR}$  را نشان میدهد.



شکل (7-ε): نمودار سیگنال کنترلی بهینه به (a) روش پیشنهادی و (b) روش LQR

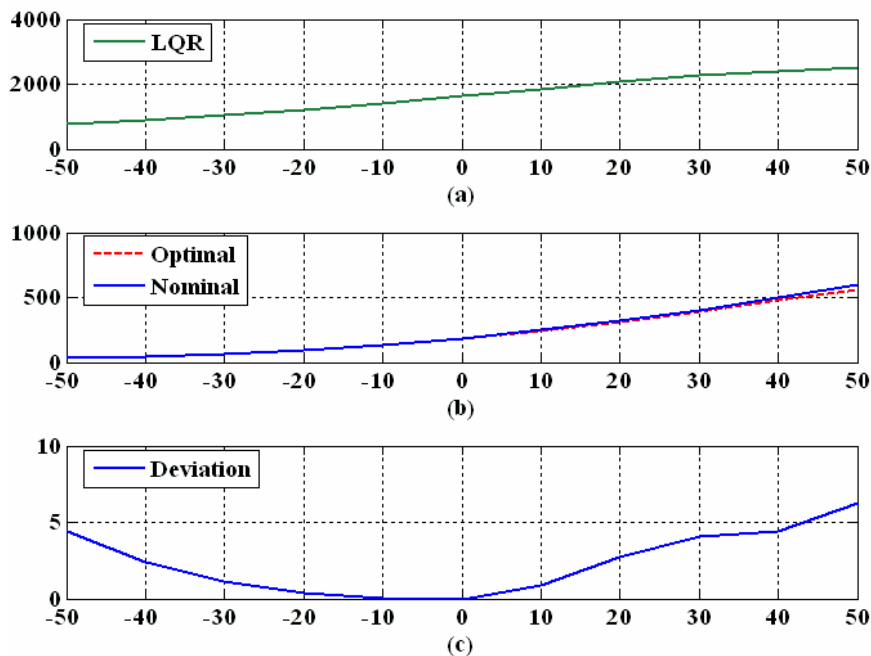
#### 4-3-3- وابستگی به مقدار اولیه سیستم

در الگوریتم LQR در سیستمهای خطی جواب بهینه  $K_{LQR}$  بدون وابستگی به شرایط اولیه سیستم یعنی  $x_0 = x(0)$  بدست میاید حال آنکه برای سیستمهای غیرخطی همان گونه که در الگوریتم ارائه شده نیز قابل مشاهده است جواب بهینه سیستم مستقل از شرایط اولیه نخواهد بود. با این شرایط ذکر شده، برای بدست آوردن جواب بهینه در یک سیستم غیرخطی حتماً میبایست شرط اولیه سیستم را بدانیم و آنگاه به دنبال جواب بهینه برویم. این موضوع در عمل نه تنها امری دشوار است بلکه حتی در بسیاری از موارد غیر ممکن خواهد بود زیرا شرایط اولیه سیستم نامعلوم میباشد. به همین دلیل در این قسمت قصد داریم تا این وابستگی را مورد بررسی قرار دهیم. این بررسی ها نشان خواهد داد که اگرچه طراحی کنترل کننده بهینه برای یک شرط اولیه مشخص، با تغییر آن شرط اولیه دیگر بطور مطلق بهینه نیست اما همچنان میتواند یک انتخاب خوب باقی بماند و بسیار بهتر از LQR عمل کند.

در این قسمت ابتدا کنترل‌کننده بهینه خود را برای مقدار اولیه نامی طراحی میکنیم و سپس شرط اولیه را ۵۰٪ حول مقدار نامی آن تغییر داده و رفتار سیستم را با حالتی که برای هر شرط اولیه جدید کنترل‌کننده بهینه آن بدست آمده است مقایسه میکنیم. نتایج بدست آمده نشان میدهد که کنترل‌کننده طراحی شده برای شرط اولیه نامی در حالتی که شرط اولیه ما برابر مقدار نامی خود نیست، از نظر رفتار مطلوب داشتن، تنها درصد کمی با کنترل‌کننده بهینه آن شرط اولیه خاص متفاوت است. این تحقیق مقاوم بودن الگوریتم ما را نسبت به شرایط اولیه در این مثال نشان می‌دهد.

شکل‌های (۸-۴) تا (۱۱-۴) نتایج بیان شده در بالا را نشان میدهد. در قسمت (a) این شکل‌ها تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات شرط اولیه  $\Delta x_{0i}|_{i=1}^4$  در الگوریتم LQR نشان داده شده است. در نمودار میانی، در قسمت (b) این شکل‌ها تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات شرط اولیه برای کنترل‌کننده نامی و کنترل‌کننده بهینه برای هر شرط اولیه، نشان داده شده است و با توجه به نزدیکی دو نمودار رسم شده در قسمت (b)، در جهت بهتر توصیف شدن اختلاف، در قسمت (c) درصد اختلاف بین دو نمودار نامی و

بهینه نسبت به مقدار بهینه یعنی  $\frac{J_{nom} - J_{opt}}{J_{opt}}$  برای تغییرات شرط اولیه نشان داده شده است.

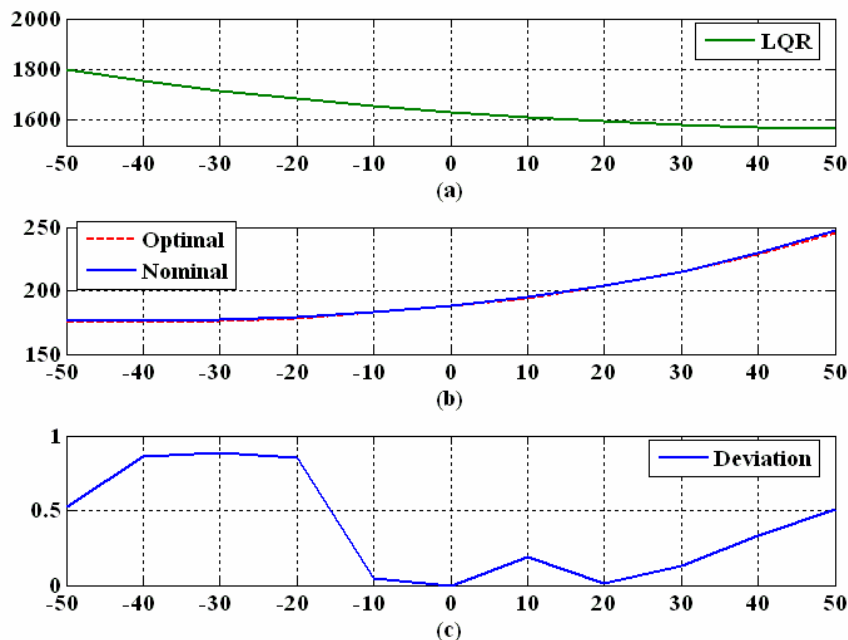


شکل (۸-۴): نمودار تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات درایه اول مقدار اولیه در روش (a) LQR، روش پیشنهادی در دو حالت نامی و

بهینه در هر نقطه، (c) درصد اختلاف بین دو نمودار نامی و بهینه نسبت به مقدار بهینه:  $\frac{J_{nom} - J_{opt}}{J_{opt}}$

شکل (۸-۴) شامل تغییرات درایه اول مقدار اولیه سیستم در بازه ۰.۵٪ حول مقدار نامی است. به بیان دیگر میتوان شرط اولیه را به صورت  $\Delta x_0 = [x_{01}^{nom} + \Delta x_{01} \quad x_{02}^{nom} \quad x_{03}^{nom} \quad x_{04}^{nom}]$  نشان داد. الگوریتم ارائه شده در این بازه حداقل ۴ برابر بهتر از الگوریتم LQR عمل میکند. تفاوت ما بین کنترل کننده نامی و کنترل کننده بهینه در این بازه ماکزیمم به ۰.۶٪ میرسد.

شکل (۹-۴) شامل تغییرات درایه دوم مقدار اولیه سیستم در بازه ۰.۵٪ حول مقدار نامی است. به بیان دیگر میتوان شرط اولیه را به صورت  $\Delta x_0 = [x_{01}^{nom} \quad x_{02}^{nom} + \Delta x_{02} \quad x_{03}^{nom} \quad x_{04}^{nom}]$  نشان داد. الگوریتم ارائه شده در این بازه حداقل ۶ برابر بهتر از الگوریتم LQR عمل میکند. تفاوت ما بین کنترل کننده نامی و کنترل کننده بهینه در این بازه ماکزیمم به ۰.۱٪ میرسد.



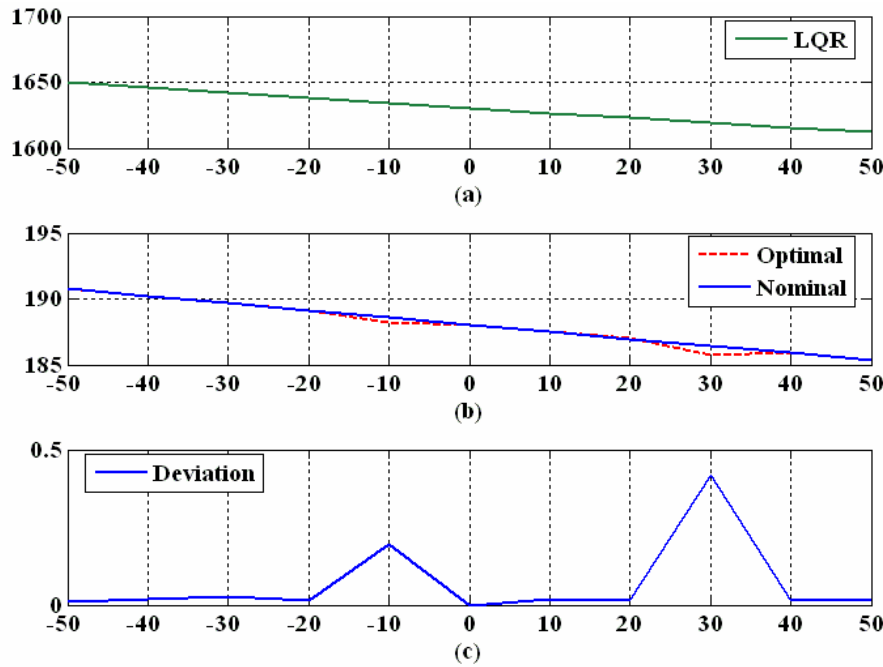
شکل (۹-۴): نمودار تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات درایه دوم مقدار اولیه در روش (a) LQR، روش پیشنهادی در دو حالت نامی و

$$\frac{J_{nom} - J_{opt}}{J_{opt}} \text{ در هر نقطه، (c) درصد اختلاف بین دو نمودار نامی و بهینه نسبت به مقدار بهینه:}$$

شکل (۱۰-۴) شامل تغییرات درایه سوم مقدار اولیه سیستم در بازه ۰.۵٪ حول مقدار نامی است. به بیان دیگر میتوان شرط اولیه را به صورت  $\Delta x_0 = [x_{01}^{nom} \quad x_{02}^{nom} \quad x_{03}^{nom} + \Delta x_{03} \quad x_{04}^{nom}]$  نشان داد. الگوریتم ارائه شده در این بازه حداقل ۸ برابر بهتر از الگوریتم LQR عمل میکند. تفاوت ما بین کنترلر نامی و کنترلر بهینه در این بازه ماکزیمم به ۰.۰۴٪ میرسد.

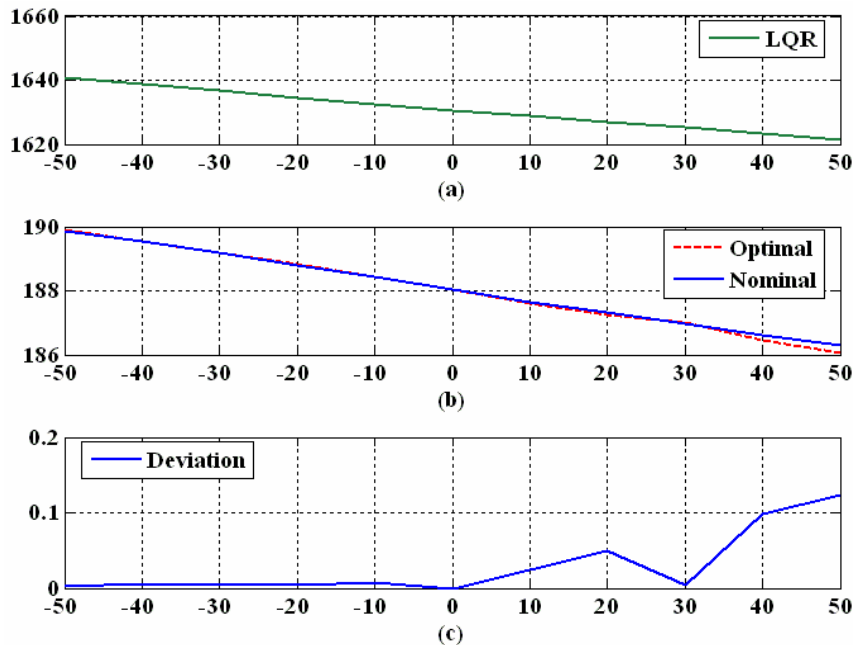
شکل (۱۱-۴) شامل تغییرات درایه اول مقدار اولیه سیستم در بازه ۰.۵٪ حول مقدار نامی است. به بیان دیگر میتوان شرط اولیه را به صورت  $\Delta x_0 = [x_{01}^{nom} \quad x_{02}^{nom} \quad x_{03}^{nom} \quad x_{04}^{nom} + \Delta x_{04}]$  نشان داد. الگوریتم ارائه شده در

این بازه حداقل ۹ برابر بهتر از الگوریتم LQR عمل میکند. تفاوت ما بین کنترلر نامی و کنترلر بهینه در این بازه ماکزیمم به ۰/۲٪ میرسد.



شکل (۱۰-۴): نمودار تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات درایه سوم مقدار اولیه در روش (a) LQR، روش پیشنهادی در دو حالت نامی و

بهینه در هر نقطه، (c) درصد اختلاف بین دو نمودار نامی و بهینه نسبت به مقدار بهینه:  $\frac{J_{nom} - J_{opt}}{J_{opt}}$



شکل (۱۱-۴): نمودار تغییرات تابع هزینه نسبت به درصد تغییرات درایه چهارم مقدار اولیه در روش (a) LQR، روش پیشنهادی در دو حالت نامی

و بهینه در هر نقطه، (c) درصد اختلاف بین دو نمودار نامی و بهینه نسبت به مقدار بهینه:  $\frac{J_{nom} - J_{opt}}{J_{opt}}$

## ۴-۴-۴- مقایسه با الگوریتمهای عددی

در این قسمت قصد داریم تا الگوریتم ارائه شده را با یکی از متداولترین روشهای عددی به نام Particle Swarm Optimization که از عملکرد بالایی نیز برخوردار است، مقایسه ای انجام دهیم. در این راستا در ابتدا بصورت مختصر به مقدمه ای از این الگوریتم عددی ونحوه بهینه سازی آن اشاره میکنیم [۳۵].

### ۴-۴-۱- PSO

الگوریتم PSO را می توان از نظر معادلات حاکم بر ذرات آن به دو دسته تقسیم کرد:

۱. الگوریتم PSO با وزن اینرسی

۲. الگوریتم PSO با فاکتور انقباض

#### ۱- الگوریتم PSO با وزن اینرسی

معادلات حاکم بر هر ذره در این روش به صورت زیر می باشد:

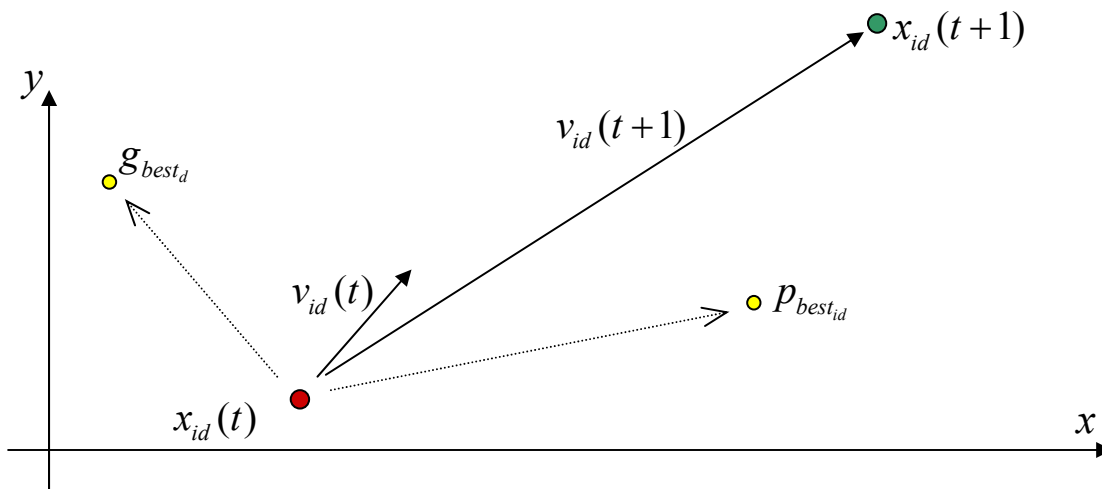
$$v_{id}(t+1) = w.v_{id}(t) + c_1.rand_1.(p_{best_{id}} - x_{id}(t)) + c_2.rand_2.(g_{best_d} - x_{id}(t)) \quad (۴-۴۴)$$

$$v_{min_d} \leq v_{id} \leq v_{max_d} \quad ; i=1, \dots, n$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1) \quad (۴-۴۵)$$

$$x_{min_d} \leq x_{id} \leq x_{max_d} \quad ; i=1, \dots, n$$

دیاگرام برداری مربوط به روابط بالا برای حالتی که ذرات ۲ بعدی می باشند، در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است.



شکل (۴-۱۲) دیاگرام برداری معادلات (۴-۴۴) و (۴-۴۵) در حالت دو بعدی

اندیس  $i$  نشان دهنده  $i$  امین ذره است و اندیس  $d$  نشان دهنده  $d$  امین بعد (dimension) هر ذره می باشد و  $n$  نیز برابر با تعداد ذرات است.

## ۲- الگوریتم PSO با فاکتور انقباض

معادلات حاکم بر هر ذره در این روش به صورت زیر می باشد:

$$v_{id}(t+1) = k[v_{id}(t) + c_1 \cdot rand_1 \cdot (p_{best_{id}} - x_{id}(t)) + c_2 \cdot rand_2 \cdot (g_{best_d} - x_{id}(t))]$$

$$k = \frac{2}{\left|2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}\right|} \quad \varphi = c_1 + c_2, \quad \varphi > 4 \quad (4-46)$$

we set  $\varphi = 4.1 \Rightarrow k = 0.729$

$$v_{\min d} \leq v_{id} \leq v_{\max d} \quad ; i = 1, \dots, n$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1) \quad (4-47)$$

$$x_{\min d} \leq x_{id} \leq x_{\max d} \quad ; i = 1, \dots, n$$

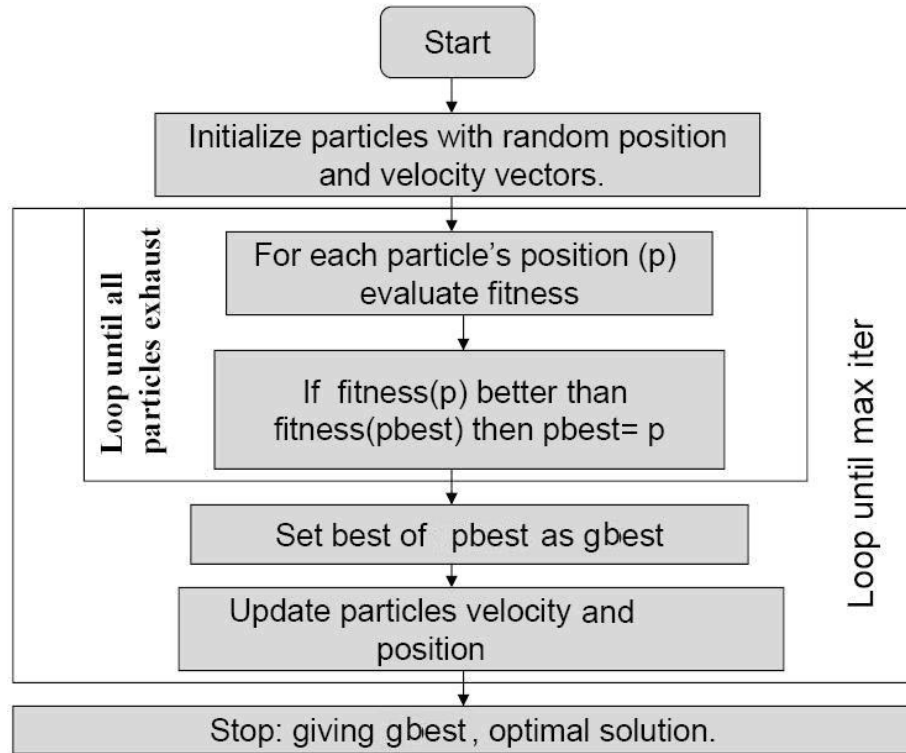
$x_{id}(t)$  مختصات  $i$  امین ذره از بعد  $d$  در تکرار  $t$  ام می باشد، به همین ترتیب  $v_{id}(t)$  سرعت  $i$  امین ذره از بعد  $d$  در تکرار  $t$  ام است.  $w$  در رابطه (۴-۴۴) وزن اینرسی می باشد.  $k$  در رابطه (۴-۴۶)، فاکتور انقباض است و  $c_1$  و  $c_2$  در روابط بالا ثابت های شتاب می باشند.  $rand$  نیز یک مقدار تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و یک است.  $p_{best_{id}}$  بهترین مختصات ذره  $i$  ام از بعد  $d$  تا تکرار  $t$  ام می باشد. به همین ترتیب به بهترین  $p_{best_{id}}$  ذرات تا تکرار  $t$  ام نیز  $g_{best}$  گفته می شود. منظور از بهترین مختصات، مختصات با کمترین مقدار تابع هزینه می باشد.

## ۴-۲- روش بهینه سازی

الگوریتم کلی PSO در فلوچارت (۱-۴) نشان داده شده است. همان طور که از فلوچارت شکل (۱۳-۴) مشاهده می شود، ابتدا سرعت و مختصات اولیه ذرات به صورت تصادفی در ناحیه جستجو تعیین می شوند که ناحیه فوق، با توجه به محدودیت هایی که برای سرعت و موقعیت ذرات می گذاریم، تعیین می گردد. سپس برای همه ذرات میزان تابع هزینه حساب می شود و اگر میزان تابع هزینه هر ذره از میزان تابع هزینه در  $p_{best}$  مربوط به آن ذره کمتر باشد، مختصات جدید در  $p_{best}$  قرار می گیرد (واضح است که در لحظه اول مختصات تصادفی هر ذره به عنوان  $p_{best}$  آن ذره نیز محسوب می شود). بهترین  $p_{best}$  را به عنوان  $g_{best}$  در نظر می گیریم. حال مختصات جدید ذرات را طبق معادلات (۴-۴۴) و (۴-۴۵) (در روش با وزن اینرسی) و (۴-۴۶) و (۴-۴۷) (در روش با فاکتور انقباض) بدست می آوریم. حال مراحل بالا را به تعداد ماکزیمم



تکرارها یا به اندازه‌ای که اختلاف دو  $g_{best}$  متوالی از یک مقدار بسیار کوچکی کمتر باشد، انجام می‌دهیم. همان طور که مشاهده می‌کنید روش بهینه سازی فوق با حجم کد بسیار کمی قابل پیاده سازی می‌باشد.



شکل (۴-۱۳) فلوچارت مربوط به روش بهینه سازی PSO

#### ۴-۳-۴- انتخاب وزن اینرسی $w$

مقدار بزرگ  $w$  باعث فرار ذره از می‌نیمم سراسری می‌شود و مقدار کوچک  $w$  نیز باعث گیرکردن ذره در می‌نیمم محلی می‌گردد. حال اگر  $w$  به صورت رابطه (۴-۴۸) تنظیم گردد، در این حالت کارایی الگوریتم به مراتب بهتر از حالتی می‌باشد که مقدار  $w$  ثابت در نظر گرفته شود.

$$w = w_{\max} - \frac{w_{\max} - w_{\min}}{iter_{\max}} \cdot iter \quad (۴-۴۸)$$

در رابطه بالا،  $iter_{\max}$  ماکزیمم تعداد تکرارها می‌باشد و  $iter$  نیز شماره تکرار فعلی می‌باشد.

#### انتخاب $v_{\max}$

$v_{\max}$  نیز یک پارامتر مهم در الگوریتم PSO می‌باشد. اگر خیلی بزرگ باشد باعث فرار ذره از حل بهینه قبلی می‌شود و اگر خیلی کوچک باشد باعث گیرکردن ذره در می‌نیمم محلی می‌گردد. هر ذره معمولاً برابر با ماکزیمم دامنه تغییرات دینامیکی همان ذره در نظر گرفته می‌شود، یعنی  $w_{\max d} = x_{\max d}$ .

#### ۴-۴-۴- تعیین پارامترها

برای تعیین پارامترها در روش PSO سه روش وجود دارد:

۱. روش Clerc [۲۵]:  $w = 0.729, c_1 = c_2 = 1.494$

۲. روش Trilea [۲۵]:  $w = 0.6, c_1 = c_2 = 1.7$

۳. روش کلی [۲۶]:  $w_{\max} = 0.9, w_{\min} = 0.6, c_1 = c_2 = 2$

در این قسمت از الگوریتم سوم یعنی روش کلی [۲۶] به عنوان الگوریتم بهینه سازی استفاده شده است. پارامترهای PSO برای بدست آوردن  $K$  که تابع هزینه  $J$  در رابطه (۴-۴۱) را کمینه میکند بصورت زیر تعریف شده اند:

- تعداد ذره ها (Particle) یا همان Population size : ۳۰
- بیشترین تعداد تکرار یا همان Iteration : ۵۰۰
- وزن اینرسی  $w$  در رابطه (۴-۴۸) تعیین میشود در حالی که:  $w_{\min} = 0.4, w_{\max} = 0.9$
- بیشترین مقدار سرعت هر ذره یا همان  $v_{\max}$  برابر با ماکزیمم دامنه تغییرات دینامیکی همان ذره در نظر گرفته می شود:  $w_{\max d} = x_{\max d}$
- شتاب ذره:  $c_1 = c_2 = 2$
- زمان شبیه سازی یا همان  $T_f$ : ۴۰

با توجه به اطلاعات بیان شده در بالا الگوریتم PSO ضریب کنترل کننده را بعد از ۱۵۰۰۰ تکرار برابر  $J_{PSO} = 187.6$  بدست می آورد. تابع هزینه این کنترل کننده نیز  $K_{ps0} = [32.95 \quad 26.19 \quad 12.62 \quad 4.73]$  میباشد که مقدار آن به الگوریتم ارائه شده ما بسیار نزدیک است و این در حالی است که الگوریتم ارائه شده این مقدار را تنها بعد از ۵۵ Iteration بدست می آورد. البته قابل ذکر است که هر تکرار در الگوریتم PSO شامل حل یک دستگاه  $n$  معادله دیفرانسیل و  $n$  مجهول است در حالی که هر تکرار در الگوریتم ارائه شده شامل حل  $n+1$  دستگاه  $n+1$  معادله دیفرانسیل و  $n+1$  مجهول است اما مسئله این است که این  $n+1$  دستگاه که تنها در شرایط اولیه با هم تفاوت دارند میتوانند به صورت موازی و با تجهیز سخت افزاری محاسبه گردد.

از جانب دیگر در الگوریتم عددی PSO میتوان با اضافه کردن ترمهای غیر هموار (Non Smooth) به دنبال خواسته های دیگر از رفتارهای سیستم بود. بطور مثال با تعریف تابع هزینه بصورت:

$$J(K) = \gamma \|u(x, K)\|_{L_\infty} + \int_0^\infty [x^T Q x] dt \quad (۴-۴۹)$$

میتوان ماکزیمم دامنه سیگنال کنترلی را در زمان (در حقیقت همان نرم  $L_\infty$ ) بصورت مستقیم کنترل نمود. با توجه به اینکه از ترم  $\|u(x, K)\|_{L_\infty}$  نمیتوان براحتی مشتق گرفت استفاده از الگوریتم ارائه شده امکان پذیر نخواهد بود. اما در این قسمت نشان خواهیم داد که با تعریف توابع مختلف هموار به عنوان تابع هزینه میتوان تا مقدار خوبی این محدودیت را جبران کرد.

#### ۴-۴-۵- استفاده از تابع هزینه های مختلف برای رفتارهای گوناگون

هدف در این قسمت تعریف تابع هزینه مناسب برای رسیدن به رفتاری است که الگوریتم PSO با کمینه کردن رابطه (۴-۴۹) به آن دست می یابد. با توجه به اینکه سیستم رابطه (۴-۳۵) و (۴-۳۶) بدون ورودی دارای نقطه سکون  $x=0$  است و پایداری سیستم ما نیز با رعایت شرط (۴-۴۲) تضمین شده است براحتی قابل نتیجه گیری است که سیگنال کنترلی ما دارای انرژی محدود است و با گذشت زمان به سمت صفر می رود. در نتیجه برای کنترل کردن دامنه سیگنال ورودی می بایست توجه خود را به مقادیر اولیه سیگنال منعطف کنیم. با توضیحاتی که داده شد براحتی می توان کاندیداهای زیادی را برای تابع هزینه معرفی نمود که در این بخش تنها به بیان مثالی بسنده میکنیم. تابع هزینه زیر را در نظر بگیرید:

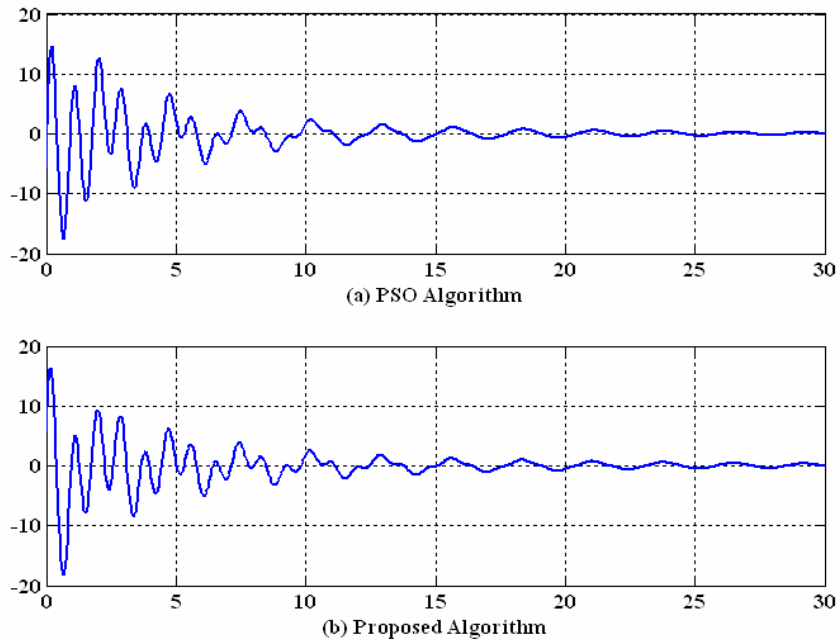
$$J(K) = \int_0^{\infty} [x^T Q x + e^{-\alpha t} u^2(x, K)] dt \quad (۴-۵۰)$$

در رابطه (۴-۴۹) با اضافه شدن ترم  $e^{-\alpha t} u^2(x, K)$  می توان هدف تابع هزینه را به مقادیر ابتدایی سیگنال ورودی جلب نمود. در اینجا با استفاده از پارامتر  $\alpha$  می توان بازه تمرکزی خود را روی سیگنال کنترلی تنظیم کنیم. در شکل (۴-۱۴) میتوان دو مقایسه دیگر ما بین الگوریتم ارائه شده و PSO مشاهده کنید.

در قسمت (۴-۱۴-a) سیگنال کنترلی طراحی شده را توسط الگوریتم PSO در حالی که تابع هزینه (۴-۴۹) را کمینه میکند مشاهده میکنید. در این قسمت  $Q=3I$  و  $\gamma=1$  در نظر گرفته شده است. هدف اصلی این بهینه سازی  $\|u(x, K)\|_{L_\infty}$  میباشد که مقدار بهینه در اینجا برابر 17.64 است.

در قسمت (۴-۱۴-b) سیگنال کنترلی طراحی شده را توسط الگوریتم ارائه شده در حالی که تابع هزینه (۴-۵۰) را کمینه میکند مشاهده میکنید. در این قسمت  $Q=3I$  و  $\alpha=0.2$  در نظر گرفته شده است. هدف اصلی این بهینه سازی نیز  $\|u(x, K)\|_{L_\infty}$  میباشد که مقدار بهینه در اینجا برابر 18.13 است.

نکته مهم دیگری که می بایست در اینجا مدنظر داشت این است که جواب بهینه ای که الگوریتم PSO به آن رسیده است بعد از ۱۵۰۰۰ بار تکرار (Iteration) بوده است در حالی که الگوریتم ارائه شده بعد از تنها ۳۱ بار تکرار (Iteration) به جواب بهینه رسیده است.



شکل (۱۴-۴): مقایسه سیگنال کنترلی روش بهینه‌سازی (PSO) با روش پیشنهادی هنگامی که خواستار ترم غیر هموار در تابع هزینه هستیم در برخی از مسائل کنترل بخصوص مسائل رباتیک نه تنها دامنه سیگنال کنترلی مهم است بلکه رفتار و تغییرات آرام آنها نیز یکی دیگر از خواسته‌های طراح خواهد بود. بدین منظور در فصل بعدی برای کنترل کننده‌های مد لغزشی به این موضوع پرداخته شده است اما در این قسمت برای نمونه این الگوریتم را برای سیستم خطی شده

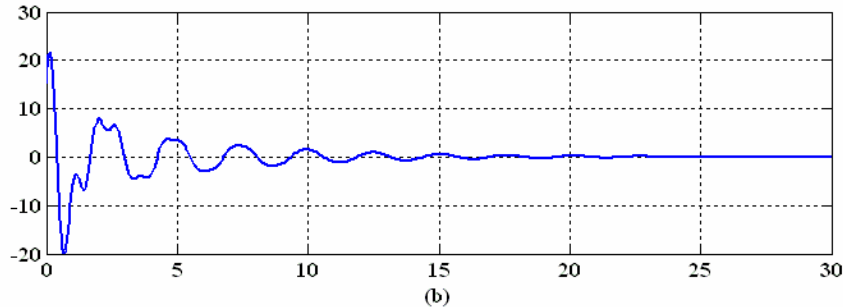
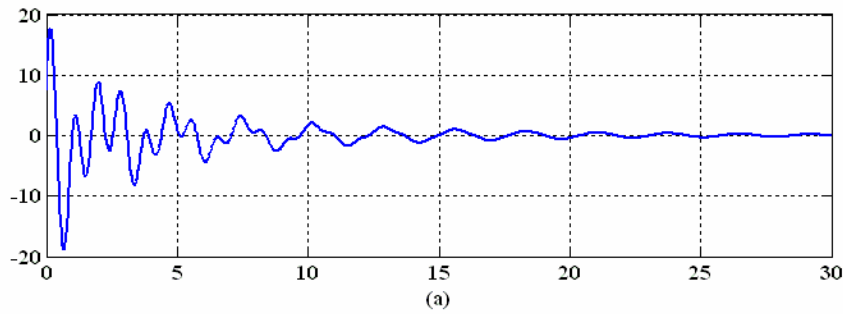
فیدبک نیز نشان می‌دهیم. در اینجا تابع هزینه جدیدی را که توانایی توصیف رفتار آرام را از سیگنال ورودی داشته باشد تعریف می‌کنیم:

$$J(K) = \int_0^{\infty} [x^T Q x + \dot{u}^2(x, K)] dt \quad (۴-۵۱)$$

در این تابع قصد داریم که انرژی تغییرات سیگنال ورودی را کمینه کنیم. در ابتدا محاسبه پارامتر  $\dot{u}$  به نظر مشکل می‌آید، اما از آنجایی که  $u = u(x, K)$  است براحتی میتوان نوشت  $\dot{u}(x, K) = \frac{\partial u(x, K)}{\partial x} \dot{x}$  و با توجه به رابطه (۴-۳۵) داریم:

$$\dot{u}(x, K) = \frac{\partial u(x, K)}{\partial x} (f(x) + g(x)u(x, K)) \quad (۴-۵۲)$$

و مجدداً همه چیز بر حسب متغیرهای  $x, K$  می‌باشد. در شکل (۴-۱۵) نتیجه شبیه سازی را مشاهده می‌کنید.



شکل (۴-۱۵): مقایسه سیگنال کنترلی روش بهینه‌سازی روش پیشنهادی برای توابع هزینه متفاوت

در قسمت (a-۱۵-۴) سیگنال کنترلی طراحی شده را توسط الگوریتم ارائه شده در حالی که تابع هزینه (۴۱-۴) را کمینه میکند مشاهده میکنید. در این قسمت  $Q=3I$  در نظر گرفته شده است. در قسمت (b-۱۵-۴) سیگنال کنترلی طراحی شده را توسط الگوریتم ارائه شده در حالی که تابع هزینه (۵۱-۴) را کمینه میکند مشاهده میکنید. در این قسمت نیز  $Q=3I$  در نظر گرفته شده است. همانگونه که انتظار داریم در قسمت (b-۱۵-۴) میزان نوسانات سیگنال ورودی کاهش یافته است و این در حالی است که بهای آن در دامنه سیگنال ورودی پرداخت شده است. براحتی میتوان با ترکیب توابع هزینه (۴۱-۴) و (۵۱-۴) به حد تعادلی از هر دو خواسته ذکر شده رسید.

#### ۴-۵- خطی‌سازی ورودی-خروجی (Input-Output Linearization)

سیستم غیر خطی و مستوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (۴-۵۳)$$

که در آن  $y$  خروجی اسکالر،  $u$  ورودی اسکالر و  $x$  بردار حالت  $n$  بعدی میباشد. در ابتدا در این قسمت هدف، خطی‌سازی رابطه بین  $u, y$  است و سپس مسئله بهینه‌سازی را مطرح می‌کنیم. با مشتق‌گیری از خروجی سیستم  $y = h(x)$  به رابطه (۴-۵۴) میرسیم:

$$\begin{aligned}
 y &= h(x) = L_f^0 h(x) \\
 \frac{dy}{dt} &= L_f^1 h(x) \\
 &\vdots \\
 \frac{d^{\rho-1} y}{dt^{\rho-1}} &= L_f^{\rho-1} h(x)
 \end{aligned} \tag{۴-۵۴}$$

$$\frac{d^\rho y}{dt^\rho} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u$$

در این مسئله مشتق گیری را در جایی متوقف میکنیم که برای اولین بار ورودی ظاهر شود. حال بطور مثال برای کنترل خروجی بر روی یک مسیر موردنظر می توان ورودی کترلی بصورت زیر تعریف کنیم:

$$u = y_d^n - k_n [y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)}] - \dots - k_2 [\dot{y} - \dot{y}_d] - k_1 [y - y_d] \tag{۴-۵۵}$$

که در آن مسیر موردنظر است. به کمک ورودی (۴-۵۵) سیستم از  $u$  به  $y$  خطی شده است.

**تعریف:**

در حالت کلی سیستم (۴-۵۳) را در نظر بگیرید این سیستم دارای درجه نسبی (Relative Degree)  $\rho \leq n, \rho$  در  $\Omega \subset R^n$  است اگر:

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1 \tag{۴-۵۶}$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$$

برای تمام  $x \in \Omega$  برقرار باشد [۲۴].

**نکته:**

۱. در برخی از حالات ممکن است که درجه نسبی وجود نداشته باشد که متداولترین آن در حالتی

است که  $L_g L_f^{\rho-1} h(x)|_{x=x_0} = 0$  و در همسایگی حول  $x_0$  مخالف صفر باشد.

۲. می توان گفت  $\rho$  برابر تعداد دفعاتی است که از خروجی  $y = h(x)$  مشتق میگیریم تا ورودی  $u$  ظاهر شود.

۳. برای حالت  $y = h(x) + w(x)u$  درجه نسبی صفر خواهد بود.

۴. برای یک سیستم خطی  $\rho = n - m$  که در آن  $n$  تعداد قطبها و  $m$  تعداد صفرها است.

**قضیه:** سیستم (۴-۵۳) را در نظر بگیرید و فرض میشود که درجه نسبی آن در  $\Omega \subset R^n, \rho \leq n$  میباشد. اگر

$\rho = n$ ، باشد برای هر  $x_0 \in \Omega$ ، همسایگی  $N$  حول  $x_0$  وجود دارد که تابع تبدیل  $z = T(x)$  بصورت

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (4-57)$$

روی  $N$  دیفئومورفیسم است. و اگر  $\rho < n$  برای هر  $x_0 \in \Omega$  همسایگی  $N$  حول  $x_0$  و توابع هموار  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-\rho}(x)$  وجود دارد بطوری که رابطه

$$L_g \varphi_i(x) = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} g(x) = 0 \quad (4-58)$$

$$1 \leq i \leq n - \rho, \quad \forall x \in N$$

برقرار است و تابع تبدیل  $z = T(x)$  بصورت

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n-\rho}(x) \\ \text{---} \\ h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(x) \\ \text{---} \\ \Psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \text{---} \\ \xi \end{bmatrix} \quad (4-59)$$

روی  $N$  دیفئومورفیسم است [۲۴].

تکنیک خطی سازی ورودی-خروجی بر پایه دو رابطه

$$z = T(x) \quad (4-60)$$

$$v = a(x) + b(x)u$$

میباشد که در آن  $z = T(x)$  همان تابع تبدیل رابطه (۴-۵۹) است و  $v$  ورودی جدید کنترلی بر حسب  $\beta, \alpha$

است که در آن توابعی از خروجی  $y = h(x)$  میباشد:

$$a(h(x)) = L_f^{\rho} h(x) \quad (4-61)$$

$$b(h(x)) = L_g L_f^{\rho-1} h(x)$$

با توجه به تابع تبدیل  $T$  در رابطه (۴-۵۹) و توابع  $\beta, \alpha$  در رابطه (۴-۶۱) میتوان سیستم (۴-۵۳) را بصورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c v \\ y &= C_c \xi \end{aligned} \quad (4-62)$$

که در آن

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-63)$$

$$C_c = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

نکته

۱. این فرم سیستم را که در مختصات  $z$  بیان میشود فرم نرمال میگویند. در فرم نرمال سیستم به دو قسمت تقسیم میشود. قسمت خطی سیستم که با متغیر حالت  $\xi$  توصیف میشود و قسمت داخلی و غیرخطی سیستم که با متغیر حالت  $\eta$  توصیف میشود.
۲. اگر در رابطه  $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$  متغیر حالت خطی  $\xi = 0$  فرض شود متغیر حالت داخلی سیستم در رابطه‌ای بصورت زیر صدق خواهد کرد.

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \quad (4-64)$$

که به آن دینامیک صفر سیستم (Zero Dynamic) میگویند. با توجه به رابطه (۴-۶۴) براحتی میتوان مشاهده کرد که دینامیک صفر سیستم معادل دینامیک داخلی است هنگامی که خروجی سیستم برابر صفر باشد  $y(t) \equiv 0$ .

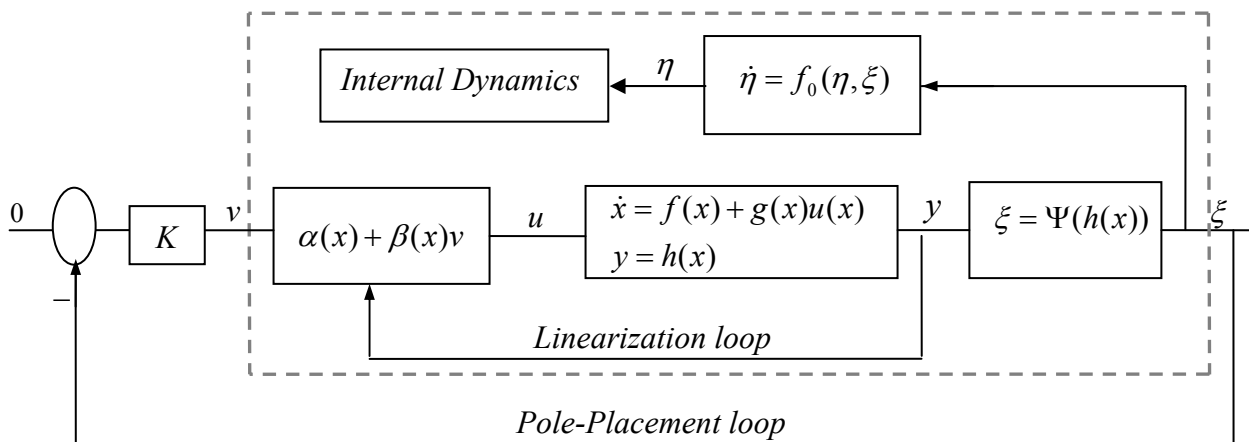
۳. در حالت کلی اگر رفتار دینامیک داخلی سیستم  $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$  مناسب باشد مسئله کنترل سیستم حل شده است. در نتیجه به عنوان یک معیار خوب میتوان رفتار دینامیک داخلی سیستم  $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$  نسبت به ورودی  $\xi$  هنگامی که پایداری ورودی حالت داشته باشد (Input to State Stability (ISS)، را در نظر داشت [۲۴].

۴. میتوان دینامیک صفر را تعمیم مفهوم صفرها (Zeros) برای سیستمهای خطی در نظر گرفت. اگر برای دینامیک صفر پایدار باشد سیستم را کمینه فاز (Minimum Phase) میگویند.

۵. اگر  $\eta = 0$  برای دینامیک صفر پایدار مجانبی باشد و بخش دیگر سیستم یعنی  $\dot{z} = A_c z + B_c v$  توسط کنترل کننده  $v = -K\xi$  پایدار مجانبی باشد آنگاه  $z = 0$  برای کل سیستم پایدار مجانبی است.

شکل (۴-۱۶) به طور مختصر مراحل خطی سازی ورودی-خروجی را نشان داده است.





شکل (۴-۱۶): نمودار جعبه‌ای سیستم کنترل حلقه بسته در خطی‌سازی ورودی-خروجی

$\alpha(x), \beta(x)$  در شکل (۴-۱۶) همانند رابطه (۴-۱۸) بصورت زیر تعریف میشوند:

$$\alpha(x) = \frac{-L_{f^\rho} h(x)}{L_g L_{f^{\rho-1}} h(x)}, \quad \beta(x) = \frac{-1}{L_g L_{f^{\rho-1}} h(x)} \quad (۴-۶۵)$$

حال قصد داریم که مسئله بهینه‌سازی برای خطی‌سازی ورودی-خروجی را تعریف کنیم. برای سیستم غیرخطی (۴-۵۳) با متغیر حالت  $x$  و درجه نسبی  $\rho$  و تبدیل یافته آن توسط دیفئومورفیسم  $T$  به (۴-۶۲) در مختصات  $z$  بردار ضرایب کنترل کننده  $K$  به صورت زیر تعریف میشود:

$$v = -K\xi \quad (۴-۶۶)$$

به طوری که  $K$  یک بردار متعلق به  $R^\rho$  است و همه قطبهای ماتریس  $(A_c - B_c K)$  در نیمه سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرد. در صورتی که سیستم (۴-۵۳) با توجه به دیفئومورفیسم  $T$  کمینه فاز (Minimum Phase) باشد طراحی کنترل کننده (۴-۶۶) با شرط ذکر شده در مورد ماتریس  $(A_c - B_c K)$  پایداری سیستم (۴-۵۳) را تضمین میکند [۲۴]. اما همانند قسمت خطی‌سازی ورودی-حالت نمیتوان از رفتاری مطلوب در سیستم (۴-۶۲) رفتاری مطلوب در سیستم (۴-۵۳) را مستقیماً نتیجه گرفت. به عنوان مثال هدف در طراحی LQR برای سیستمهای خطی، تعیین  $K$  در رابطه (۴-۶۶) است بطوری که تابع هزینه

$$J_z = \int_0^\infty (\xi^T \bar{Q} \xi + v^2) dt \quad (۴-۶۷)$$

بهینه گردد که در آن  $\bar{Q}$  ماتریس  $\rho \times \rho$  مثبت معین است. اما آنچه که برای ما مهم میباشد رفتار سیستم (۴-۵۳) است زیرا  $z$  در سیستم (۴-۶۲) یک پارامتر مجازی بوده در حالی که سیستم حقیقی و فیزیکی ما سیستم (۴-۵۳) است. به بیان دیگر هدف بهینه کردن تابع هزینه

$$J_x = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^2) dt \quad (4-68)$$

میباشد. تنها با اندکی تغییر میتوان الگوریتم بهینه‌سازی در قسمت خطی‌سازی ورودی-حالت را در قسمت خطی‌سازی ورودی-خروجی نیز بکار برد [۳۳]. مجدداً تابع هزینه را بصورت یک متغیر وارد معادلات دینامیکی سیستم میکنیم. به بیان دیگر با فرض  $J_x = \int_0^{T_f} \Gamma(x, K) dt$  داریم:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \Gamma(x(t), K) \quad (4-69)$$

از ترکیب (4-69) و (4-53) خواهیم داشت:

$$\dot{X}(t) = H(X(t), K) \quad (4-70)$$

که در آن  $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix}$  برداری از  $R^{(n+1+\rho)}$  به  $R^{n+1}$  است. حال برای معادله دیفرانسیل (4-70) شرط اولیه  $X_0 = \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $T_f$  را داریم. برای رسیدن به معادله دیفرانسیل ماتریس  $W = \frac{\partial X}{\partial K}$  که  $W \in R^{(n+1+\rho) \times \rho}$  و بصورت

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial K_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial K_\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial K_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial K_\rho} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial K_1} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial K_\rho} \end{bmatrix} \quad (4-71)$$

تعریف میشود کفایت از طرفین رابطه (4-70) نسبت به  $K$  مشتق گرفت. که در نهایت به رابطه

$$\dot{W} = \frac{\partial H(X, K)}{\partial X} \times W + \frac{\partial H(X, K)}{\partial K} \quad (4-72)$$

با شرط اولیه  $W(0) = 0$  میرسیم. حال با حل معادلات (4-70) و (4-72) و آنچه که برای رابطه (4-34) توضیح داده شد الگوریتم بهینه‌سازی ارائه شده را برای خطی‌سازی ورودی-خروجی نیز اعمال میکنیم.

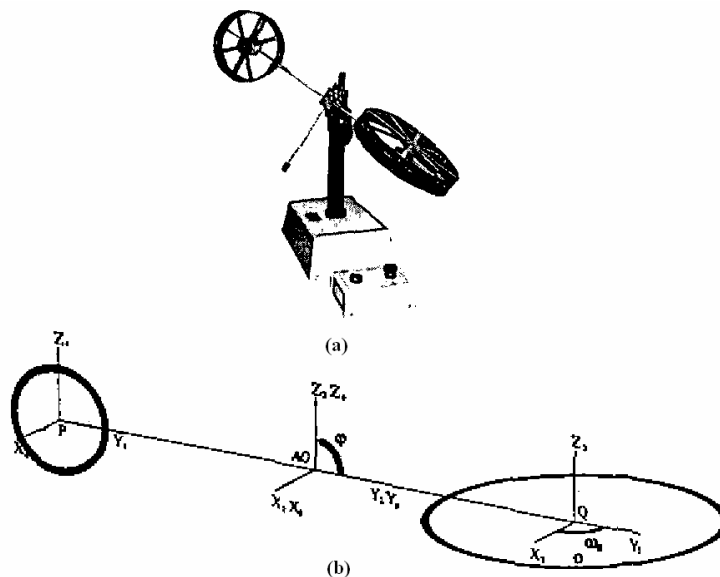
#### 4-5-1- روند مرحله به مرحله الگوریتم بهینه‌سازی خطی‌سازی ورودی-خروجی

- **مرحله اول:** در این قسمت بعد از تبدیل سیستم غیرخطی (4-53) به سیستم قسمتی خطی (4-62) توسط دیفئومورفیسم  $T$  قبل از هر چیز میبایست از پایدار مجانبی بودن دینامیک صفر در رابطه (4-64) سیستم اطمینان حاصل شود.

- **مرحله دوم:** مقدار اولیه دلخواهی برای ضریب  $K$  انتخاب میکنیم به طوری که مقادیر ویژه ماتریس  $(A_c - B_c K_0)$  تماماً در سمت چپ محور اعداد مختلط قرار داشته باشد.
- **مرحله سوم:** معادلات دیفرانسیل  $(\xi-70)$  و  $(\xi-72)$  را با شرایط اولیه  $X_0 = \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $W(0)=0$  را بطور همزمان حل میکنیم. این معادلات شامل  $n+1$  مجهول  $X(t)$  و  $\rho(n+1)$  مجهول  $W$  میباشد و از جانب دیگر در رابطه  $(\xi-70)$   $n+1$  معادله و در رابطه  $(\xi-72)$   $\rho(n+1)$  معادله داریم. در نتیجه دارای یک دستگاه  $(n+1)(\rho+1)$  معادله دیفرانسیل و  $(n+1)(\rho+1)$  مجهول هستیم.
- **مرحله چهارم:** پس از حل معادلات دیفرانسیلی عادی بالا با استفاده از اطلاعات بدست آمده در زمان  $T_f$  و از طریق رابطه  $(\xi-34)$  ضریب  $K$  مورد نظر را بهبود مبخشیم.

#### ۴-۵-۲- مثال عددی و شبیه سازی

در این قسمت با یک مثال عددی از یک سیستم فیزیکی، کاربردی بودن الگوریتم ارائه شده را نشان میدهم. هلیکوپتر آزمایشگاهی (Laboratory Helicopter) دارای سیستم مکانیکی با دو درجه آزادی است. حرکت این دستگاه آزمایشگاهی توسط ۲ موتور همانند هلیکوپتر صورت می‌پذیرد که در شکل  $(\xi-17)$  نشان داده شده است.



شکل  $(\xi-17)$ : هلیکوپتر آزمایشگاهی (Laboratory Helicopter) [۳۷]

این دو درجه آزادی شامل دوران هواپیما حول محور قائم (Yaw) و دیگری زاویه بلند شدن (Pitch Angle) است. در این شبیه سازی جهت زاویه ثابت بوده ( $\theta = c$ ) و سرعت زاویه ای قسمت انتهایی هلیکوپتر نیز برابر صفر خواهد بود ( $\omega_t = 0$ ). زاویه بلند شدن این سیستم با موتور اصلی کنترل میشود. معادلات طولی (Longitudinal) این سیستم و خروجی قابل اندازه گیری بصورت زیر معرفی می شود:

$$L_\varphi \ddot{\varphi} + G_s \sin(\varphi) + G_c \cos(\varphi) + K_\varphi \dot{\varphi} = \bar{L}_g |\omega_g| \omega_g \quad (۴-۷۳)$$

$$I_g \dot{\omega} = P_m - (B_g + \bar{D}_g |\omega_g|) \omega_g \quad (۴-۷۴)$$

$$y_m = \varphi - \varphi_{eq} \quad (۴-۷۴)$$

که در آن

- $\varphi$ : زاویه ما بین زاویه بلند شدن و محور افقی
- $I_\varphi$ : اینرسی سیستم طولی نسبت به محور دورانی
- $\omega_g$ : سرعت زاویه موتور اصلی
- $I_g$ : اینرسی ملخ هلیکوپتر نسبت به محور دورانی
- $\bar{L}_g |\omega_g| \omega_g$ : گشتاور تولید شده توسط نیروی آیرودینامیکی موتور اصلی
- $K_\varphi \dot{\varphi}$ : گشتاور اصطکاک
- $G_s \sin(\varphi)$ : نیروی گرانش ۱
- $G_c \cos(\varphi)$ : نیروی گرانش ۲
- $P_m$ : گشتاور موتور
- $B_g$ : نیروی اصطکاکی ثابت در موتور
- $\bar{D}$ : ثابت پسا (Drag) در ملخ هلیکوپتر

همان طور که دیده می شود سیستم دارای دو درجه آزادی زاویه بلند شدن  $\varphi$  و سرعت زاویه موتور اصلی  $\omega_g$  است در حالی که تنها یک موتور ( $P_m$ ) دارد. برای جزئیات بیشتر برای این دستگاه به [۲۸] مراجعه شود. در [۲۷] نشان داده شد که فیدبک کنترلی خطی کننده کنترل مناسبی برای این سیستم در نزدیکی نقطه تعادل نمی تواند باشد. در این راستا در [۲۹] با تقریب معادلات حالت این سیستم در محدوده ای خاص موفق به بدست آوردن انرژی کنترلی تقریبی مناسبی در این محدوده شده است. در [۳۰] نشان داده شد که معادلات طولی سیستم هنگامی که سرعت زاویه ای آن نزدیک صفر نباشد قابل خطی سازی ورودی-خروجی است. در حقیقت ایده طراحی کنترل کننده ای با قابلیت سوئیچ کردن در دو مرحله (Two Step Controller) با توجه به نقطه کار سیستم از این نقطه شروع گشت. از جانب دیگر برای حالتی که سرعت زاویه ای موتور

نزدیک نقطه سکون استاتیکی سیستم است مدل ساده شده‌ای در [۳۰] ارائه گشت. در این مدل ساده شده نیروی آیرودینامیکی موتور در محدوده حول  $\omega_g = 0$  بصورت خطی تقریب خورده است. در نتیجه این تقریب برای این مدل تنها برای سرعت‌های با دامنه کم قابل قبول است. حال معادلات دینامیک طولی رابطه (۴-۷۳) بصورت زیر تقریب زده میشود:

$$\begin{aligned} L_\varphi \ddot{\varphi} + G_s \sin(\varphi) + G_c \cos(\varphi) + K_\varphi \dot{\varphi} &= L_g \omega_g \\ I_g \dot{\omega} &= P_m - (B_g + D_g) \omega_g \end{aligned} \quad (۴-۷۵)$$

که در آن  $L_g$  و  $D$  در [۳۰] بگونه‌ای بدست آمده است که پیوستگی سیگنال کنترلی در هنگام سویچ کردن تضمین گردد. حال با تعریف بردار متغیرهای بصورت

$$x = \begin{bmatrix} \varphi - \varphi_{eq} \\ \dot{\varphi} \\ \omega_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (۴-۷۶)$$

دینامیک سیستم در فضای حالت به صورت  $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$  است که در آن

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \\ -kx_3 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \frac{-G_s \sin(x_1 + \varphi_{eq}) - G_c \cos(x_1 + \varphi_{eq}) - K_\varphi x_2 + L_g x_3}{I_\varphi} \quad (۴-۷۷)$$

$$g = [0 \quad 0 \quad k]^T$$

$$y = h(x) = x_1$$

که با توجه به [۳۰] در راستای پیوستگی سیگنال کنترلی رابطه پارامترهای  $k, L_g$  با پارامترهای اولیه بصورت زیر بدست آمده است:

$$L_g = \frac{\bar{L}_g}{|\omega_0|} \quad (۴-۷۸)$$

$$k = \frac{\bar{k}}{2}$$

که در آن  $\omega_0$  سرعت آستانه‌ای است که در آن کنترل کننده دو مرحله‌ای سویچ میشود. حال با مشتق‌گیری از سیگنال خروجی  $y = h(x)$  داریم:

$$y = h(x) = x_1$$

$$\frac{dy}{dt} = L_f h(x) + L_g h(x)u = x_2$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u = f_2 \quad (4-79)$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x)u = L_f^3 h(x) + \frac{kL_g}{I_\phi} u$$

از آنجایی که  $L_g L_f^2 h(x) \frac{kL_g}{I_\phi} \neq 0$  در نتیجه سیستم دارای درجه نسبی سه میباشد و سیگنال کنترلی را برای انتقال سیستم در فضای حالت به نقطه دیگر میتوان بصورت زیر محاسبه نمود:

$$u = \frac{v - L_f^3 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} \quad (4-80)$$

$$v = -K\xi$$

که در آن  $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$  و

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4-81)$$

در [30] بردار ضرایب کنترلی  $K$  توسط الگوریتم LQR تعیین شده است. در این قسمت ما قصد داریم تا الگوریتم ارائه شده خود را بر روی این سیستم فیزیکی پیاده‌سازی کنیم و نتایج آن را با الگوریتم LQR مقایسه نماییم.

با توجه به رابطه (4-80) سیگنال کنترلی ما بصورت تابعی از  $K, x$  است به بیان دیگر  $u = u(x, K)$  حال مسئله بهینه‌سازی پیدا کردن بردار ضریب  $K$  برای سیستم (4-77) است بطوری که تابع هزینه

$$J(K) = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^2(x, K)] dt \quad (4-82)$$

کمینه گردد که در آن  $Q$  ماتریس  $n \times n$  مثبت معین است. شرط مهمی که در این مینیمایست مدنظر قرار گیرد شرط پایداری سیستم است که با قرار دادن قطبهای ماتریس  $(A_c - B_c K)$  سمت چپ محور اعداد مختلط میتوان آن را تضمین نمود. این شرط محدودیت زیر را که از جدول Routh-Hurwitz حاصل میشود برای درایه‌های بردار  $K$  ایجاد میکند:

$$\begin{aligned} k_3 k_2 - k_1 &> 0 \\ k_i &> 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4-83)$$

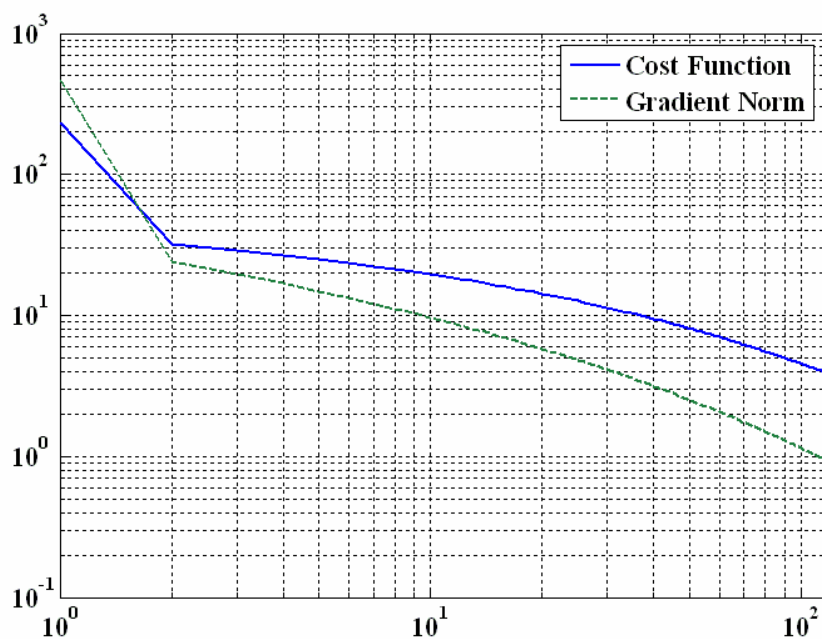
با توجه به اینکه در محاسبات  $Q = \beta I$  در نظر گرفته شده میتوان با تعاریف

$$F(x, K) = f(x) + g(x)u(x, K) \quad (4-84)$$

$$\Gamma(x, K) = \beta \|x\|_2^2 + u^2(x, K)$$

از معادلات (4-70) و (4-72) و آنچه که برای رابطه (4-34) توضیح داده شد برای الگوریتم بهینه‌سازی استفاده نمود. نتایج شبیه‌سازی را در شکل‌های (4-18) تا (4-20) مشاهده می‌کنید.

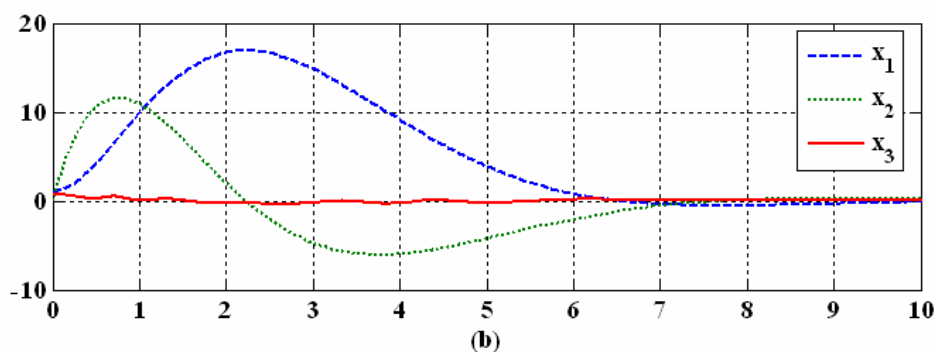
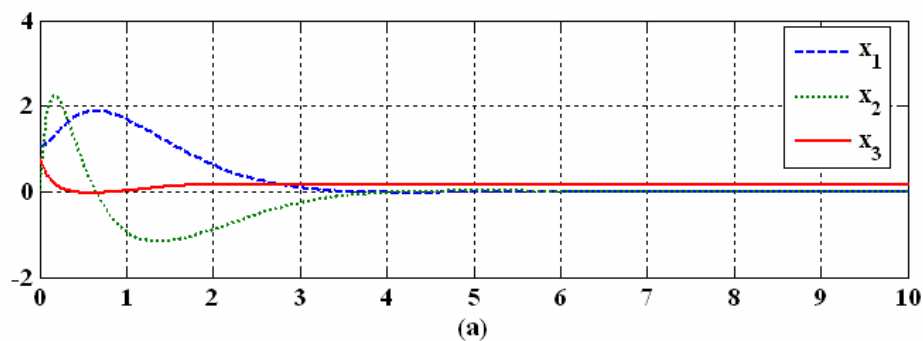
نتایج عددی شبیه‌سازی در حالی بدست آمده است که در تابع هزینه ماتریس  $Q = 3I$  است. همچنین شرط اولیه برای معادله (4-77)  $x_0 = \left(\frac{\pi}{8} \quad 0 \quad 0.8\right)^T$  و ماتریس گام در الگوریتم گرادیان  $\mu = 0.01I$  است. پارامترهای فیزیکی  $I_\varphi, K_\varphi, G_s, G_c, k, \varphi_{eq}, \bar{L}_g$  با توجه به معیارهای فیزیکی به ترتیب 0.7, 1.5, 5, 0.5, 0.23, 40 تخمین زده شده است. مقدار اولیه برای  $K_0$  نیز مقدار دلخواه است بطوری که شرط (4-83) را برآورده سازد. همچنین از آنجایی که  $\infty$  در رابطه (4-41) عملی نیست از  $T_f = 40$  به عنوان زمان پایانی شبیه‌سازی استفاده شده است. شکل‌های زیر نتایج عددی را نشان می‌دهد.



شکل (4-18): تغییرات تابع هزینه  $J$  و اندازه‌گیری بردار گرادیان آن

شکل (4-18) تغییرات تابع هزینه  $J_x$  و اندازه بردار گرادیان این تابع هزینه یعنی  $\left\| \frac{\partial J_x}{\partial K} \right\|$  را نسبت به دفعات تکرار نشان می‌دهد. در طول حدوداً 119 مرحله اندازه بردار گرادیان تابع هزینه به اندازه کافی کوچک شده است که میتوان الگوریتم را متوقف کرد.  $K_{opt} = [20.16 \quad 24.41 \quad 11.69]$  ضریب بهینه کنترل‌کننده مورد نظر میباشد که توسط آن مینیمم تابع هزینه  $J_x$  برابر  $J_{opt} = 3.84$  است. برای مقایسه این نتیجه با الگوریتم رایج LQR با استفاده از دستور lqr در Matlab برای تابع هزینه مشابه با  $\beta$  یکسان بردار ضریب کنترل

کننده  $K_{LQR} = [0.707 \ 1.841 \ 2.045]$  را بدست می آید. تابع هزینه  $J_x$  برای  $K_{LQR}$  برابر  $J_{LQR} = 232.74$  است که این نشان میدهد که الگوریتم ارائه شده توانسته است نتایج بدست آمده از الگوریتم کلاسیک LQR را تا ۶۰ برابر بهبود بخشد. این تفاوت چشمگیر از این امر نشئت میگیرد که الگوریتم LQR تنها به بهبود تابع هزینه در فضای مجازی  $z$  نگاه میکند و این موضوع نمیتواند رفتار مناسب سیستم را در فضای حقیقی و فیزیکی  $x$  تضمین نماید. پاسخ زمانی حلقه بسته سیستم و سیگنال کنترلی مربوطه را برای دو روش طراحی ذکر شده در شکل‌های (۱۹-۴) و (۲۰-۴) آورده شده است.

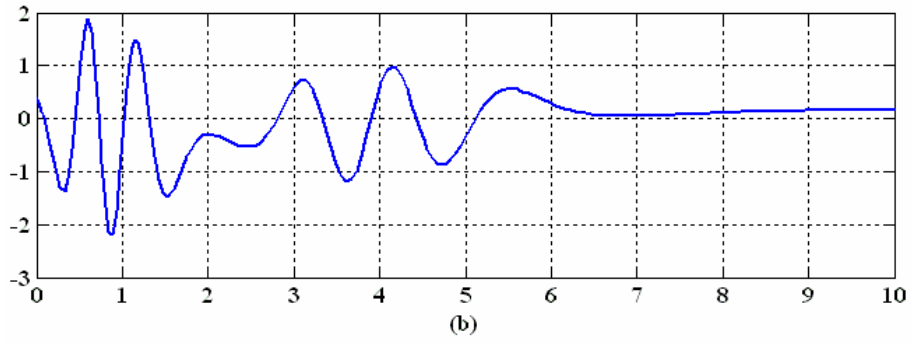
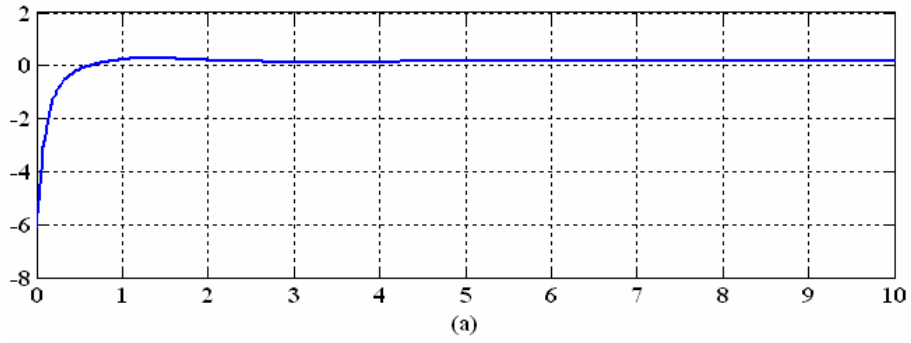


شکل (۱۹-۴): نمودار پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با (a) کنترل کننده پیشنهادی و (b) کنترل کننده LQR

شکل (۱۹-۴-a) نمودار پاسخ زمانی حلقه بسته سیستم را در حالتی که ضریب کنترل کننده از طریق الگوریتم ارائه شده بدست آمده نشان میدهد و در مقابل در شکل (۱۹-۴-b) نمودار پاسخ زمانی حلقه بسته سیستم برای ضریب کنترل کننده  $K_{LQR}$  را میتوان مشاهده کرد. با مقایسه این دو براحتی میتوان دریافت که دامنه تغییرات متغیرهای حالت ما تا چندین برابر بهبود یافته است. این وضعیت برای سیگنال کنترلی  $u$  نیز صادق است.

شکل (۲۰-۴-a) و (۲۰-۴-b) بترتیب نمودار سیگنال کنترلی برای ضریب کنترل کننده بدست آمده از الگوریتم ارائه شده و  $K_{LQR}$  را نشان میدهد.





شکل (۲۰-۴): نمودار سیگنال کنترلی بهینه به روش پیشنهادی و (b) روش LQR

## فصل پنجم

# طراحی کنترل بهینه در روش کنترلی مد لغزشی

عدم دقت در مدل کردن سیستمهای فیزیکی به ویژه سیستمهای غیرخطی یکی از مشکلات تأثیرگذار در کنترل آنها بوده است. به همین منظور هر طراحی در زمینه کنترل در عمل می‌بایست این عدم دقت را در نظر داشته باشد. کنترل مقاوم (Robust) یکی از شاخه‌های کنترل است که به این موضوع می‌پردازد. یکی از روشهای کنترل غیرخطی که توانایی در بر گرفتن مفهوم کنترل مقاوم را دارد روش کنترل مد لغزشی (Sliding-Mode) است. در این قسمت ابتدا برای توصیف کنترل مد لغزشی مفاهیم ابتدایی آن برای یک سیستم درجه ۱ مطرح میشود. سپس آن را برای یک سیستم غیرخطی که سیستم فیزیکی یک روبات را توصیف میکند تعمیم میدهیم و در ادامه در جهت طراحی کنترل کننده‌ای بهینه نسبت به تابع هزینه‌ای تعریف شده روش پیشنهادی خود را ارائه میکنیم. در انتها نیز توانایی این روش را با شبیه‌سازی آن نشان میدهیم.

## ۵-۱-۱- صفحه لغزشی

سیستم تک ورودی و تک خروجی (Single-input Single-output) زیر را در نظر بگیرید [۲۳]

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(x) + g(x)u \quad (5-1)$$

$$y = x(t)$$

که در آن  $f, g$  توابع اسکالر بوده و متغیر  $x$  خروجی اسکالر است (بطور مثال موقعیت فیزیکی یک سیستم مکانیکی) و متغیر  $u$  ورودی اسکالر است (بطور مثال گشتاور موتور به سیستم مکانیکی). بردار حالت این سیستم بصورت

$$X(t) = [x(t) \quad \dot{x}(t) \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t)]^T \quad (5-2)$$

تعریف میشود. در معادله (۵-۱) تابع  $f(x)$  در حالت کلی غیرخطی است. مسئله کنترل ردیابی (Tracking) این گونه مطرح می‌گردد که هدف طراحی ورودی  $u$  است بصورتی که متغیر حالت ما  $X(t)$  بتواند حالت متغیر با زمان دلخواه  $X_d(t) = [x_d(t) \quad \dot{x}_d(t) \quad \dots \quad x_d^{(n-1)}(t)]^T$  را دنبال کند. همان گونه که در مقدمه اشاره گشت این روش کنترلی این امکان را دارد که در صورت داشتن عدم قطعیت (البته با شرط کران‌دار بودن عدم قطعیت) در شناسایی توابع برداری  $f, g$  همچنان توانایی برآورده کردن خواسته‌های مسئله کنترل وجود داشته باشد. البته در این پروژه به این موضوع پرداخته نمیشود و هدف بیان توانایی این روش کنترلی و اهمیت آن است.

خطای ردیابی در مسئله کنترل بصورت  $\tilde{x} = x - x_d$  برای متغیر حالت  $x$  تعریف میشود در نتیجه برای متغیر  $X$  در حالت برداری خواهیم داشت

$$\tilde{X}(t) = X(t) - X_d(t) = [\tilde{x}(t) \quad \dot{\tilde{x}}(t) \quad \dots \quad \tilde{x}^{(n-1)}(t)]^T \quad (5-3)$$

به بردار خطای ردیابی (Tracking Error) می‌گویند. حال صفحه  $S(t)$  متعلق به فضای حالت  $R^n$  توسط معادله اسکالر  $s(x, t) = 0$  تعریف می‌شود که در آن

$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x} \quad (5-4)$$

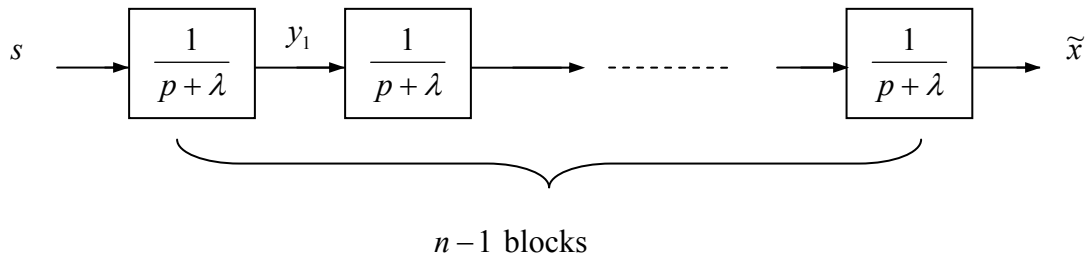
بعلاوه پارامتر  $\lambda$  یک مقدار ثابت و مثبت است. بطور مثال برای  $n = 3$  داریم

$$s = \ddot{\tilde{x}} + 2\lambda\dot{\tilde{x}} + \lambda^2\tilde{x} \quad (5-5)$$

اگر برای رابطه  $s(x, t) = 0$  شرط اولیه  $\tilde{x}(0) = 0$  را داشته باشیم مسئله ردیابی معادل آن است که همواره برای  $t > 0$  بروی صفحه  $S(t)$  باقی بمانیم. در حقیقت معادله  $s(x, t) = 0$  بیانگر حل معادله دیفرانسیل خطی است که تنها جواب آن جواب بدیهی  $\tilde{x} \equiv 0$  است.

اگر کمی دقیقتر به موضوع نگاه کنیم خواهیم دید که مسئله ردیابی در فضای  $n$  بعدی (که در حقیقت یک مسئله ردیابی از درجه  $n$  برای  $x$  است) میتواند با یک مسئله پایداری (Stabilization) درجه یک برای  $s$  جایگزین شود. به بیان دیگر با توجه به رابطه (۵-۴) براحتی می‌توان مشاهده کرد که تنها با یکبار مشتق گیری از رابطه (۵-۴) ورودی  $u$  ظاهر می‌شود.

از جانب دیگر محدودیت بر روی متغیر  $s$  محدودیت بر روی متغیر  $\tilde{x}$  را نتیجه می‌دهد. به همین دلیل متغیر  $s$  میتواند اطلاعات مفیدی در مورد خطای ردیابی ما ( $\tilde{x}$ ) بدهد و این موضوع زیر بنای روش کنترل مد لغزشی است. فرض کنیم که شرط اولیه رابطه (۵-۴) بصورت  $\tilde{x}(0) = 0$  است (البته می‌توان براحتی در صورتی که شرط اولیه ناصفر داشتیم آن را جداگانه محاسبه نموده و آنگاه آنرا اضافه کنیم) حال با توجه به این رابطه می‌توان با نمودار بلوکی شکل (۵-۱) رابطه مابین خطای ردیابی و متغیر  $s$  را بوسیله  $n-1$  فیلتر پایین‌گذر درجه یک نشان میدهد



شکل (۵-۱): نمودار بلوکی محاسبه  $\tilde{x}$

که در آن  $p = \frac{d}{dt}$  عملگر لاپلاس است. همانطور که در شکل (۵-۱) مبینید خروجی فیلتر اول  $y_1$  فرض شده است در نتیجه

$$y_1(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} s(\tau) d\tau \quad (5-6)$$

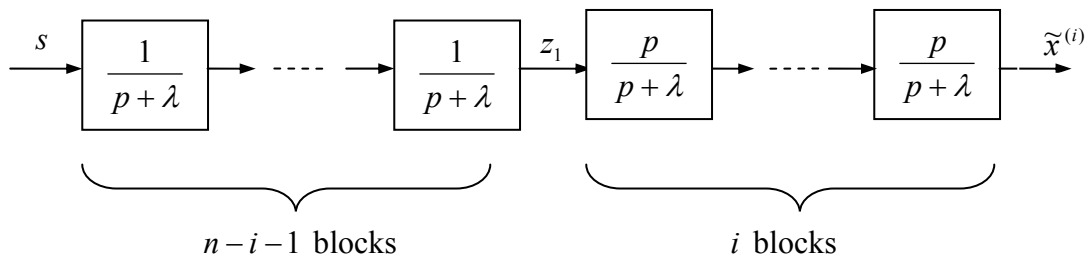
حال اگر برای متغیر  $s$  کران بالای  $\Phi$  را در نظر بگیریم یعنی  $|s(t)| \leq \Phi$  برای تمام  $t \geq 0$  برقرار باشد خواهیم داشت

$$|y_1(t)| = \Phi \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \left(\frac{\Phi}{\lambda}\right)(1 - e^{-\lambda t}) \leq \frac{\Phi}{\lambda} \quad (5-7)$$

می‌توان استدلال رابطه (۵-۷) را برای تک تک فیلترهای شکل (۵-۱) نوشت و تا  $y_{n-1} = \tilde{x}$  جلو رفت. در نتیجه داریم

$$|\tilde{x}(t)| \leq \frac{\Phi}{\lambda^{n-1}} = \varepsilon \quad (5-8)$$

حال برای بدست آوردن کران برای  $\tilde{x}^{(i)}$  می توان با کمی تغییر در نمودار شکل (۵-۱) به شکل (۵-۲) رسید



شکل (۵-۲): نمودار بلوکی محاسبه  $\tilde{x}^{(i)}$

با توجه به رابطه (۵-۸) برای شکل (۵-۱) داریم

$$|z_1(t)| \leq \frac{\Phi}{\lambda^{n-i-1}} \quad (5-9)$$

که در آن  $z_1(t)$  خروجی  $n-i-1$  امین فیلتر است. حال با توجه به اینکه

$$\frac{p}{p+\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{p+\lambda} \quad (5-10)$$

و رابطه (۵-۹) و نمودار شکل (۵-۲) داریم

$$|\tilde{x}^{(i)}(t)| \leq \left(\frac{\Phi}{\lambda^{n-i-1}}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda}\right)^i = (2\lambda)^i \varepsilon \quad (5-11)$$

که  $\varepsilon$  در رابطه (۵-۸) معرفی شده است. در نتیجه خواهیم داشت:

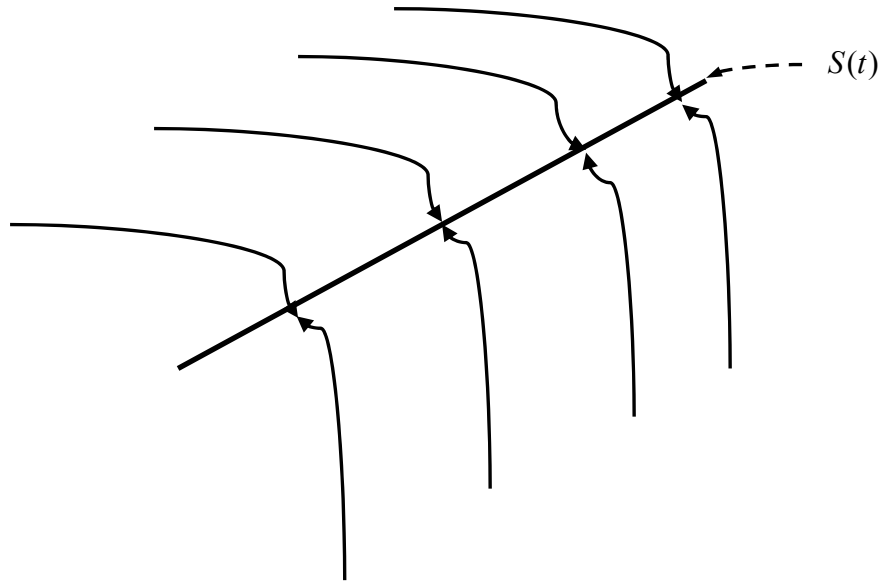
$$\forall t \geq 0, |s(t)| \leq \Phi \Rightarrow \forall t \geq 0, |\tilde{x}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \varepsilon \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5-12)$$

با توجه به رابطه (۵-۱۲) مسئله درجه  $n$  خطای ردیابی براحتی به یک مسئله پایداری درجه یک تبدیل می شود. در این راستا برای پایداری  $s(t)$  میتوان ورودی کنترلی  $u$  در رابطه (۵-۱) اعمال نمود تا در خارج صفحه  $S(t)$  رابطه

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2(t) \leq -\eta |s| \quad (5-13)$$

برقرار باشد. که در آن  $\eta$  مقداری ثابت و مثبت است. رابطه (۵-۱۳) نشان می دهد که اندازه متغیر  $s(t)$  در همه راستاهای مسیرهای مختلف کاهش می یابد. در نتیجه با شروع از مقدار اولیه خارج صفحه  $S(t)$  به سمت آن حرکت می کند. رابطه (۵-۱۳) را شرط لغزش (Sliding-Condition) نیز میگویند. نمودار شکل (۳-۵) این موضوع را توصیف می نماید. نکته مهم دیگر این است که شرط لغزش ایجاب میکند که به محض قرار گرفتن روی صفحه  $S(t)$ ، روی آن برای تمام زمانهای بعد از آن بمانیم. به بیان دیگر صفحه  $S(t)$  با توجه به شرط لغزش تشکیل یک مجموعه ناوردا (Invariant Set) را می دهد. حال اگر طراحی ورودی کنترلی

$u$  بگونه‌ای باشد که صفحه  $S(t)$  با وجود اغتشاشات (Disturbance) و نامعینیهای دینامیکی (Dynamic Uncertainties) همچنان یک مجموعه ناوردا باشد آنگاه طراحی ما مقاوم خواهد بود و این سنگ بنای طراحی کنترل مقاوم در روش کنترلی مد لغزشی است.



شکل (۵-۳): شرط لغزش

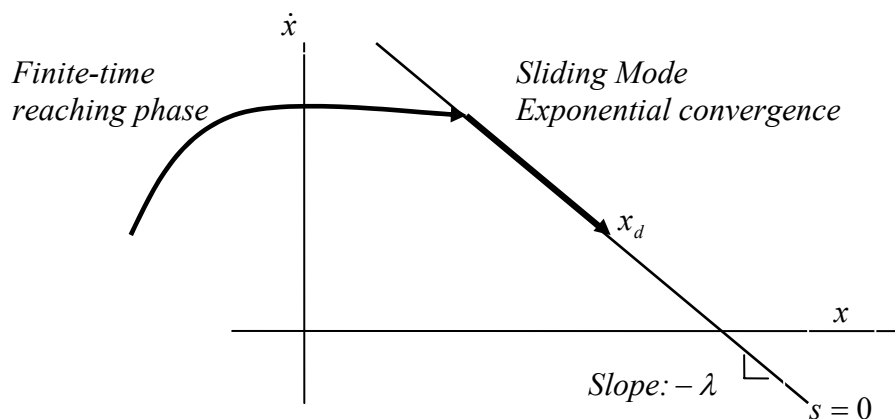
در ادبیات کنترل به صفحه  $S(t)$  صفحه لغزشی (Sliding Surface) و به رفتار سیستم بر روی آن مد لغزشی (Sliding Mode) گفته می‌شود. حال با فرض اینکه  $s(t=0) \geq 0$  و توجه به رابطه (۵-۱۳) و انتگرال گیری از طرفین آن خواهیم داشت

$$s(t = t_{reach}) - s(t = 0) = -s(0) \leq -\eta(t_{reach} - 0) \quad (5-14)$$

که در آن  $t_{reach}$  زمان رسیدن مسیر حرکت ما در فضای حالت از نقطه خارج صفحه لغزش بر روی آن است. در نتیجه  $t_{reach}$  زمانی محدود و کمتر از  $\frac{s(t=0)}{\eta}$  خواهد بود. از جانب دیگر میتوان همین مسیر را برای  $s(t=0) \leq 0$  بیان نمود. در نتیجه

$$t_{reach} \leq \frac{|s(t=0)|}{\eta} \quad (5-15)$$

و به بیان دیگر در ابتدا از نقطه‌ای در فضای حالت در زمانی محدود به صفحه لغزشی میرسیم و بعد از قرار گرفتن روی این صفحه خطای ردیابی ما بصورت نمایی با ثابت زمانی  $\frac{n-1}{\lambda}$  (که از بصورت سری قرار دادن دنباله  $n-1$  فیلتر با ثابت زمانی  $\frac{1}{\lambda}$  حاصل شده است) به سمت صفر میرود. مطالب مطرح شده در نمودار شکل (۵-۴) برای  $n=2$  نشان داده شده است.



شکل (۵-۴): توصیف نموداری روابط (۵-۴) و (۵-۱۳)

به طور خلاصه در روش کنترل مد لغزشی ایده‌ای که در روابط (۵-۴) و (۵-۱۳) آمده است این است که ابتدا صفحه لغزشی بصورت تابعی از حالتها تعریف کنیم (که این کار در رابطه (۵-۴) انجام شده است) در ادامه ورودی کنترلی خود را بگونه‌ای تعریف میکنیم تا فاصله ما از صفحه لغزشی در زمانی محدود صفر شود. این ایده مبتنی تابع شبه لیپانوف (Lyapunov) است که تغییرات آن در راستای مسیر حرکت کاهشی باشد.

در ادامه دینامیک یک روبات را در حالت کلی معرفی کرده و روش کنترلی مد لغزشی را برای این سیستم فیزیکی پیاده سازی نموده و در انتها الگوریتم بهینه‌سازی پیشنهادی بهمراه شبیه‌سازی عددی آورده شده است.

## ۲-۵- مقدمه‌ای برای مدل‌سازی روبات

برای توصیف کامل یک جسم صلب در فضا به ۶ متغیر احتیاج داریم، ۳ تا برای مکان  $(x, y, z)$  و ۳ تا هم برای راستای آن (Orientation). در نتیجه یک روبات کامل باید ۶ درجه آزادی داشته باشد. اگر درجه آزادی روبات کمتر از ۶ باشد، در این صورت روبات نمی‌تواند یک جسم صاب را که به انتهای آن متصل است در هر موقعیت دلخواهی قرار دهد و برعکس اگر درجه آزادی از ۶ بیشتر باشد، در این صورت روبات (Redundant) خوانده می‌شود. یعنی برای قرار دادن یک جسم در مکان و راستاهای دلخواه روشهای مختلفی برای روبات وجود دارد. شکل یا حالتی که روبات به خود می‌گیرد را Configuration می‌گویند و به قسمت انتهایی روبات End-Effector گفته می‌شود.

## ۵-۲-۱- دینامیک روبات

بطور کلی می‌توان دینامیک سیستمهای روباتیک را بصورت زیر بیان نمود

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (5-16)$$

که در آن

- $q \in R^n$ : مکان زاویه‌ای اتصالات (Joints)
- $\dot{q} \in R^n$ : سرعت اتصالات ( $\dot{q}, q$  متغیرهای حالت هستند)
- $M \in R^{n \times n}$ : ماتریس اینرسی (Inertia Matrix)
- $\tau$ : نیروی کنترلی تولید شده توسط موتورها به همراه نیروهای خارجی بر روبات
- $G(q)$ : نیروی گرانشی (میدان پتانسیل)
- $C(q, \dot{q})\dot{q}$ : نیروهای سانتریفوژ (Centrifugal) به همراه نیروی کوریولیس (Coriolis)
- $M(q)\ddot{q}$ : نیروی اینرسی

حال هدف شناسایی و استخراج رابطه (۵-۱۶) است. ایده اصلی بدست آوردن رابطه (۵-۱۶) از طریق رابطه اویلر-لاگرانژ است.

### رابطه اویلر-لاگرانژ

اگر  $K$  را انرژی جنبشی و  $P$  را انرژی پتانسیل فرض کنیم رابطه اویلر-لاگرانژ بصورت

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (5-17)$$

$$L \equiv K - P$$

تعریف می‌شود. انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم بصورت زیر تعریف می‌شود

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (5-18)$$

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n m_i g^T r_i$$

که در آن  $r_i$  بردار مختصات مرکز جرم بازوی  $i$ ام نسبت به مرکز مختصات است. حال با توجه به تعریف (۵-۱۸) و جایگذاری آن در رابطه (۵-۱۷) می‌توان به رابطه دینامیکی سیستمهای روباتیک در (۵-۱۶) رسید. برای اطلاعات بیشتر در زمینه نحوه محاسبه ماتریسهای  $M(q)$ ،  $C(q, \dot{q})$  و  $G(q)$  می‌توان به [۳۱] مراجعه کرد.



قبل از اینکه مبحث طراحی کنترل کننده را شروع کنیم دو قضیه مهم و کاربردی را که در طراحی کنترل کننده مفید واقع می شود را بیان میکنیم.

### قضیه باربالات (Barbalat's Lemma)

فرض کنید  $e(t)$  به طور یکنواخت (uniform) پیوسته باشد به بیان دیگر

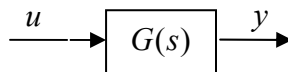
$$\forall R > 0 \exists \eta(R) > 0, \forall t_1, t \geq 0, |t - t_1| < \eta \Rightarrow |e(t) - e(t_1)| < R \quad (5-19)$$

و فرض کنید انتگرال  $\int_0^{\infty} e(t) dt < \infty$  وجود داشته باشد در این صورت

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (5-20)$$

بعلاوه اگر  $e(t) \in L_{\infty}$  و  $e(t) \in L_2$  باشد و  $e(t)$  پیوسته یکنواخت باشد (شرط کافی برای اینکه  $e(t)$  پیوسته یکنواخت باشد این است که  $\dot{e}(t) \in L_{\infty}$  باشد)  $e(t)$  به سمت صفر میل میکند [۲۳].

### قضیه ویدیا ساگر (Vidyasagar)



شکل (5-5): فیلتر اکیدا سره  $G(s)$

- اگر  $u(t) \in L_p$  باشد و  $1 < p < \infty$  در این صورت  $y(t), \dot{y}(t) \in L_p$
- اگر  $u(t) \in L_{\infty}$  باشد در این صورت  $y(t), \dot{y}(t) \in L_{\infty}$  بطور یکنواخت پیوسته است.
- اگر  $u(t) \in L_1$  باشد در این صورت  $y(t), \dot{y}(t) \in L_1$  و  $y(t) \in L_{\infty}$  نیز است [۳۱].

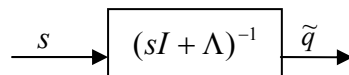
### ۳-۵- طراحی کنترل کننده اسلوتاین (Slotine)

در این روش با استفاده از قضیه لیاپانوف و بدون خطی سازی سعی در کنترل سیستم داریم. برای طراحی کنترل کننده اسلوتاین، ابتدا متغیرهای زیر را تعریف میکنیم

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q - q_d \\ v_r &= \dot{q}_d - \Lambda \tilde{q} \end{aligned} \quad (5-21)$$

$$s = \dot{\tilde{q}} - v_r = \ddot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}$$

که در آن  $q$  بردار حالت مکان زاویه ای،  $q_d$  بردار مکان زاویه ای دلخواه (که هدف دنبال کردن آن است) و  $\tilde{q}$  خطای ردیابی است.  $\Lambda$  ماتریس ثابت مثبت معین میباشد.



شکل (۵-۶): فیلتر اکیداً سره توصیف کننده رابطه از  $s$  به  $\tilde{q}$

$s$  ورودی سیستم پایدار و اکیداً سره است پس اگر  $u(t) \in L_2$  باشد در این صورت  $\tilde{q}$  طبق قضیه ویدیاساگر به سمت صفر میرود. حال در سیستم (۵-۱۶) با قرار دادن قانون کنترلی اسلوتاین به فرم

$$\tau = M(q)\dot{v}_r + C(q, \dot{q})v_r + g(q) - Ks \quad (5-22)$$

که در آن  $K$  ماتریس ثابت مثبت معین است، می توان رابطه (۵-۱۶) را بصورت زیر بازنویسی نمود

$$M(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + Ks = 0 \quad (5-23)$$

با انتخاب تابع  $V(\cdot) = \frac{1}{2}s^T M(q)s$  که لزوماً یک تابع لیاپانوف نیست، به سادگی مشاهده می شود که

$$\dot{V}(\cdot) = -s^T Ks \leq -\lambda_{\min}(K)\|s\|^2 \leq 0 \quad (5-24)$$

از طرفی دیگر

$$\frac{1}{2}\lambda_{\min}(M)\|s\|^2 \leq V(\cdot) = \frac{1}{2}s^T M(q)s \leq \frac{1}{2}\lambda_{\max}(M)\|s\|^2 \quad (5-25)$$

و با توجه به روابط (۵-۲۴) و (۵-۲۵)، خواهیم داشت

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{2\lambda_{\min}(K)}{\lambda_{\max}(M)}V(t) \quad (5-26)$$

نابرابری دیفرانسیلی (۵-۲۶) دارای جوابی به فرم

$$V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t} \quad (5-27)$$

$$\gamma = \frac{2\lambda_{\min}(K)}{\lambda_{\max}(M)}$$

با توجه به رابطه (۵-۲۵) تا (۵-۲۷)، داریم

$$\frac{1}{2}\lambda_{\min}(M)\|s(t)\|^2 \leq V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t} \leq \frac{1}{2}\lambda_{\max}(M)\|s(0)\|^2 e^{-\gamma t} \quad (5-28)$$

و بیان دیگر

$$\frac{1}{2}\lambda_{\min}(M)\|s(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\lambda_{\max}(M)\|s(0)\|^2 e^{-\gamma t} \quad (5-29)$$

در نتیجه

$$\|s(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(M)}{\lambda_{\min}(M)}}\|s(0)\|e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (5-30)$$

یعنی  $s$  به صورت نمایی به سمت صفر میل میکند و آشکار است که  $s$  عضو  $L_2 \cap L_\infty$  است پس طبق قضیه ویدیاساگر  $\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}$  نیز متعلق به  $L_\infty$  است و  $\tilde{q}$  بصورت نمایی به سمت صفر میرود. در حقیقت  $s$

همان صفحه لغزشی است که در قسمت روش مد لغزشی به آن پرداختیم. همان گونه که در روابط (۵-۲۱) و (۵-۲۲) مشاهده میشود در طول این طراحی تنها محدودیت برای ماتریسهای  $\Lambda$  و  $K$  مثبت معین بودن آنهاست. هدف اصلی در این فصل طراحی بهینه این دو پارامتر در جهت کمینه کردن تابع هزینه مشخص است.

### ۵-۴- مسئله کنترل بهینه

برای سیستم (۵-۱۶) کنترل کننده (۵-۲۲) را نسبت به پارامترهای  $\Lambda$  و  $K$  بگونه‌ای پیدا شود تا حالت‌های سیستم ( $q$ ) حالت‌های دلخواه  $q_d$  را دنبال کند و تابع هزینه

$$J(\theta) = \int_0^{T_f} \Gamma(q, \dot{q}, \theta) dt \quad (۵-۳۱)$$

کمینه گردد. در اینجا بردار پارامترهای ما  $\theta = [\bar{K} \quad \bar{\Lambda}]^T$  است که در آن برداری سطری شامل تمام درایه‌های ماتریس  $K$  و  $\bar{\Lambda}$  برداری سطری شامل تمام درایه‌های ماتریس  $\Lambda$  است.

با توجه به رابطه (۵-۲۲) و تعریف  $\theta = [\bar{K} \quad \bar{\Lambda}]^T$  و جایگذاری آن در (۵-۱۶) داریم

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau(q, \dot{q}, \theta) \quad (۵-۳۲)$$

حال با تعریف  $x_1 \equiv q$  و  $x_2 \equiv \dot{q}$  و همچنین با توجه به اینکه ماتریس  $M(q) > 0$  بوده و در نتیجه معکوس پذیر است می‌توان رابطه (۵-۳۲) را بصورت زیر بازنویسی نمود

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(x_1) \{-C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1) + \tau(x_1, x_2, \theta)\} \end{bmatrix} \quad (۵-۳۳)$$

در نتیجه با تعریف  $x \equiv [x_1 \quad x_2]^T$  و رابطه‌های (۵-۳۱) و (۵-۳۳) داریم

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta) \\ J(\theta) = \int_0^{T_f} \Gamma(x, \theta) dt \end{cases} \quad (۵-۳۴)$$

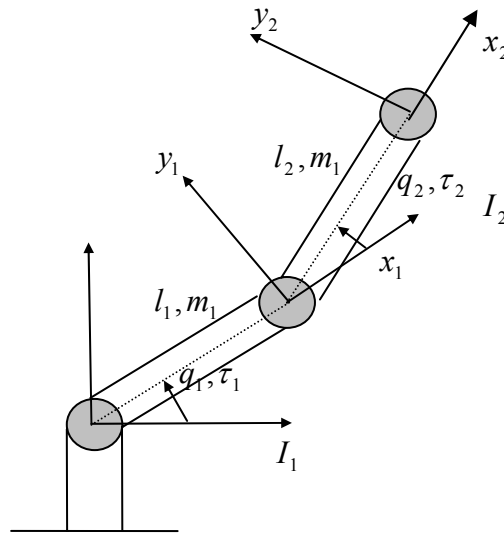
که در آن  $f(x, \theta) = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(x_1) \{-C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1) + \tau(x_1, x_2, \theta)\} \end{bmatrix}$  است. رابطه (۵-۳۴) دقیقاً مشابه

روابط (۴-۲۳) و (۴-۲۴) است. در نتیجه از الگوریتم پیشنهادی که در فصل قبلی توضیح داده شد می‌توان در این قسمت نیز استفاده نمود. تنها تفاوتی که در این قسمت و نسبت به فصل قبلی است وجود محدودیتهای متفاوت بر روی درایه‌های بردار  $\theta$  است. در این جا تنها محدودیت ما مثبت معین بودن ماتریسهای  $K$  و  $\bar{\Lambda}$  است. در همین راستا در قسمت شبیه‌سازی و مثال عددی ماتریسهای  $K$  و  $\bar{\Lambda}$  را

قطری فرض میکنیم. در نتیجه شرط لازم و کافی مثبت معین بودن ماتریسهای  $K$  و  $\bar{\Lambda}$  بصورت مثبت بودن تک تک درایه‌ها خواهد بود.

### ۵-۴-۱- مثال عددی و شبیه سازی

در این قسمت با یک مثال عددی از یک سیستم فیزیکی، کاربردی بودن الگوریتم ارائه شده را نشان میدهیم. بدین منظور از یک روبات با دو بازو (Two-link Robot) استفاده شده است که شکل (۵-۷) ویژگی‌های ظاهری آن را توصیف میکند.



شکل (۵-۷): روبات با دو بازو (Two-link Robot)

در رابطه دینامیکی (۵-۱۶) این روبات برای ماتریس اینرسی  $M(q)$  و ماتریس  $C(q, \dot{q})$  داریم

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (5-35)$$

$$C = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h\dot{q}_2 + h\dot{q}_1 \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-36)$$

که در (۵-۳۶)  $h \equiv -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2$  است و همچنین برای ماتریس گرانش  $G(q)$  داریم

$$G(q) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (5-37)$$

در روابط (۵-۳۵) تا (۵-۳۷) پارامترهای  $l_{c2}, l_{c1}$  به ترتیب نصف پارامترهای  $l_2, l_1$  است. در این شبیه‌سازی

ماتریس  $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$  و ماتریس  $K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$  در نظر میگیریم. و تنها محدودیت ما

$$\lambda_i > 0, k_i > 0 \quad (5-38)$$

$$i = 1, 2$$

نکته مهم باقی مانده در این قسمت نحوه تعریف تابع هزینه میباشد. با توجه به ورودی کنترلی (5-22) و همچنین فیلتر درجه اولی که در رابطه  $s = \dot{q} + \Lambda \tilde{q}$  وجود دارد پاسخ زمانی معادلات دیفرانسیل ما به پاسخ زمانی سیستم درجه اول شباهت دارد. در نتیجه تعریف تابع هزینه‌ای بر روی حالت‌های سیستم و همچنین انرژی سیگنال ورودی و بهینه کردن آن تأثیر مشهودی ندارد. اما یکی از مسائل کنترلی مهمی که در رباتیک می‌بایست به آن توجه شود دامنه سیگنال ورودی و میزان تغییرات آن میباشد. در نتیجه تابع هزینه همانند رابطه (5-51) تعریف میشود

$$J(\theta) = \int_0^{T_f} [x^T Q x + \|\dot{x}(x, \theta)\|^2] dt \quad (5-39)$$

که در آن  $\theta = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad k_1 \quad k_2]^T$  و  $x = [q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$  تعریف شده است. نتایج عددی شبیه‌سازی در حالی بدست آمده است که در تابع هزینه ماتریس  $Q = 3I$  است. همچنین شرط اولیه برای معادله

$$x_0 = \left( \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad 0 \quad 0 \right)^T \quad (5-34)$$

و ماتریس گام در الگوریتم گرادیان  $\mu = 0.01I$  است. پارامترهای

فیزیکی با مقادیر نامی  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$  و  $l_1 = l_2 = 0.5 \text{ m}$  و  $I_1 = I_2 = 0 \text{ kgm}^2$  تخمین زده شده است. مقدار اولیه برای  $\theta_0$  نیز مقدار دلخواه است بطوری که شرط (5-38) را برآورده سازد و  $T_f = 40$  به عنوان زمان پایانی شبیه‌سازی استفاده شده است. پاسخ زمانی حلقه بسته سیستم، سیگنال کنترلی و مشتق سیگنال کنترلی مربوطه را برای دو مقدار متفاوت  $\theta$  طراحی ذکر شده در شکل‌های (5-8) و (5-9) آورده شده است.

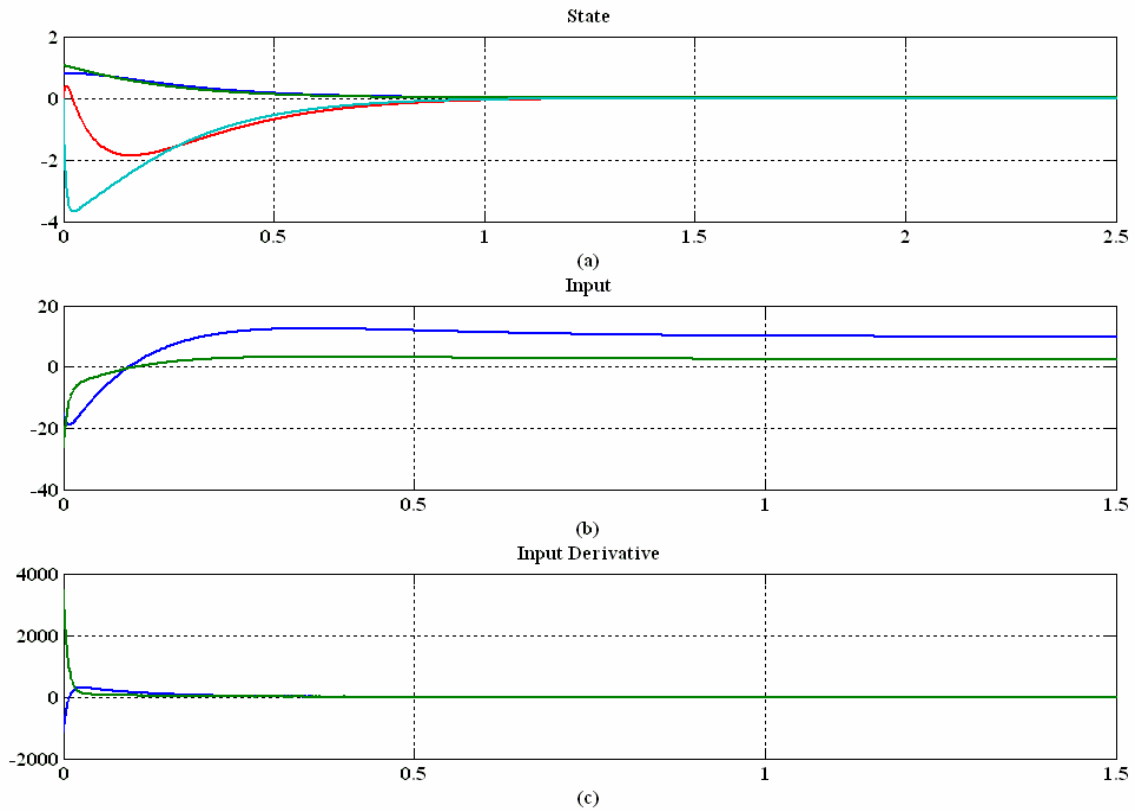
در نمودار شکل (5-8)  $\theta = [5 \quad 5 \quad 5 \quad 5]^T$  فرض شده است. در این حالت مقدار تابع هزینه (5-39)

برابر  $J = 22935$  میشود این در حالی است که برای مقدار بهینه ضرایب که تنها پس از 18 Iteration

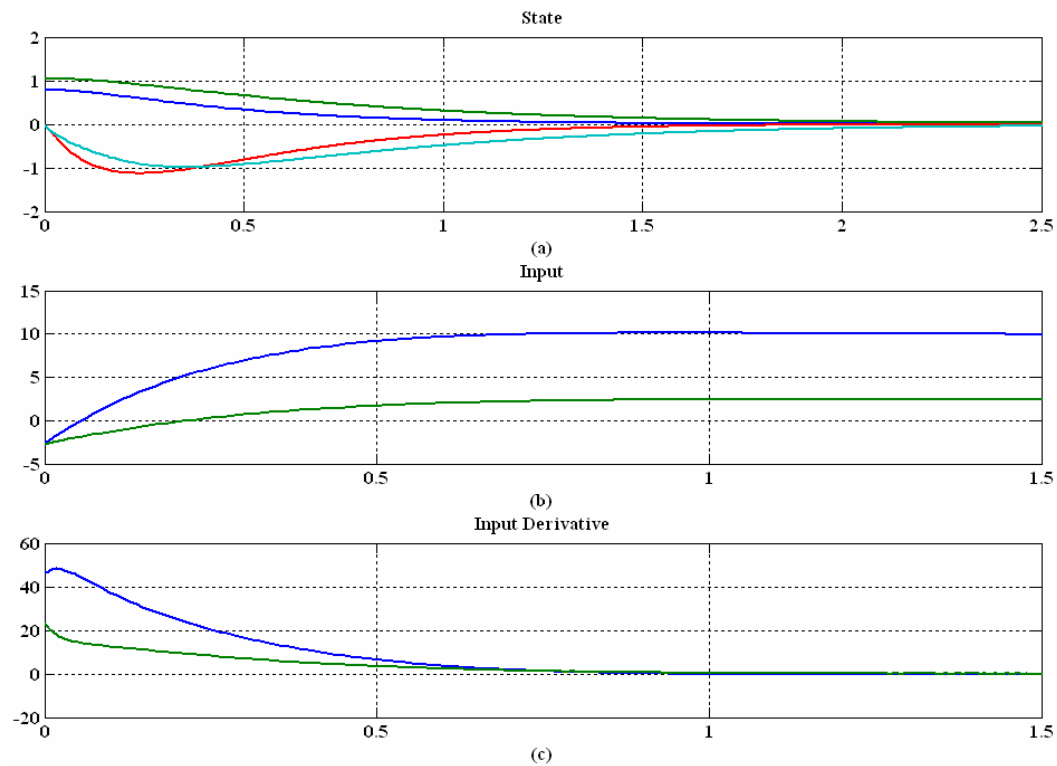
بدست آمده است تابع هزینه مربوطه برابر  $J_{opt} = 207.6$  میباشد. به بیان دیگر میزان بهبود تابع هزینه آن هم

در تعداد تکرار کم بیش از 110 برابر بوده است. ضرایب بهینه بدست آمده برابر

$$\theta_{opt} = [3.07 \quad 1.66 \quad 2.95 \quad 1.24]^T \text{ است. نتایج طراحی بهینه در نمودار شکل (5-9) آمده است.}$$



شکل (۸-۵): (a) نمودار پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته، (b) نمودار سیگنال کنترلی، (c) نمودار مشتق سیگنال کنترلی برای ضریب دلخواه



شکل (۹-۵): (a) نمودار پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته، (b) نمودار سیگنال کنترلی، (c) نمودار مشتق سیگنال کنترلی برای ضریب بهینه

## فصل ششم

### نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات

## ۶-۱- نتیجه گیری

در این پروژه نتایج زیر حاصل گشت

۱. کنترل کننده مناسب برای بهینه سازی یک تابع هزینه تعریف شده در راستای رسیدن به یک رفتار مطلوب در سیستمهای خطی و سیستمهای غیرخطی مستوی، به صورت حلقه باز طراحی گردید و روش تحلیلی و عددی مناسب برای رسیدن به جواب نهایی ارائه شد.
۲. روش خطی سازی فیدبک در ورودی-حالت و ورودی-خروجی از دیدگاه بهینه سازی تعمیم داده شده و در میان مجموعه جوابهای گوناگونی که در طراحی خطی سازی فیدبک ارائه میشود جواب بهینه با توجه به معیار مناسبی بدست آمده است. در این پروژه الگوریتم پیشنهادی و نحوه پیاده سازی آن مرحله به مرحله بیان گردید.
۳. در جهت نشان دادن توانایی این الگوریتم، کارایی آن بر روی یک سیستم فیزیکی اعمال گردیده و نتایج آن با الگوریتم LQR مقایسه گشته است. همچنین روش ارائه شده با الگوریتم عددی بهینه سازی PSO مقایسه شد.
۴. روش کنترل مد لغزشی از دیدگاه بهینه سازی تحلیل شده و در میان مجموعه جوابهای گوناگونی که در طراحی کنترل مد لغزشی ارائه میشود جواب بهینه با توجه به معیار مناسبی که همان تابع هزینه است، بدست آمده است. سپس با پیاده سازی این الگوریتم پیشنهادی برای یک سیستم غیرخطی که سیستم فیزیکی یک روبات دیگر را توصیف میکند توانایی آن نشان داده شد.

## ۶-۲- پیشنهادات

۱. ارائه یک الگوریتم پیوسته همانند یک معادله دیفرانسیل در جهت بهبود پارامترهای مجهول.
۲. معرفی ماتریس  $\mu$  مناسب تری در این الگوریتم بهینه سازی در رابطه (۳۴-۶) در جهت افزایش سرعت و کاهش Iteration در رسیدن به جواب مورد نظر.
۳. تحلیل تنوع تابع دیفئومورفیسم  $z = T(x)$  در روش خطی سازی فیدبک و بررسی آن در راستای تابع هزینه ای مناسب.
۴. ارائه روشی در روشهای کنترلی سیستمهای غیرخطی همانند خطی سازی فیدبک یا مد لغزشی در جهت بهینه کردن تابع هزینه با کرانی مشخص.



## مراجع و منابع

- [1] A.J. Krener, On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems, *SIAM J. Control Optim.* 11 (1973) 670-676.
- [2] B. Jakubczyk, W. Respondek, On linearization of control systems, *Bull. Acad. Polonaise, Sci. Ser. Sci. Math.* 28 (1980) 517-522.
- [3] A. Isidori, A. Krener, A.J. Gori, S. Monaco, Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach, *IEEE Trans. Automat. Control* 26 (1981) 331-345.
- [4] L.R. Hunt, R. Su, G. Meyer, Global transformations of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control* 28 (1983) 24-31.
- [5] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer, Berlin, 1995.
- [6] H. Nijmeijer, A.J. Van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer, Berlin, 1990.
- [7] B. Charlet, J. Levine, R. Marino, On dynamic feedback linearization, *System Control Lett.* 13 (1989) 143-151.
- [8] B. Charlet, J. Levine, R. Marino, Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization, *SIAM J. Control Optim.* 29 (1991) 38-57.
- [9] W.M. Sluis, A necessary condition for dynamic feedback linearization, *Systems Control Letters* 21 (1993) 277-283.
- [10] R. Marino, On the largest feedback linearizable subsystem, *System Control Lett.* 6 (1986) 345-351.
- [11] W. Respondek, Partial linearization, decompositions and fiber linear systems, in: C.I. Byrnes, A. Lindquist (Eds.), *Theory and Applications of Nonlinear Control*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1986, pp. 137-154.
- [12] Z. Sun, S. Ge, Nonregular feedback linearization: a nonsmooth approach, *IEEE Trans. Automat. Control* 48 (2003) 1772-1776.
- [13] Niemiec, M., and C. Kravaris, "Controller synthesis for multivariable nonlinear non-minimum-phase processes," *Proc. of ACC*, 2076 (1998).
- [14] McLain, R.B., M.J. Kurtz, and M.A. Henson, "Habituating control for nonsquare nonlinear processes," *Ind. Eng. Chem. Res.*, 35 (11), 4067 (1996).
- [15] Doyle, F. J., F. Allgower, and M. Morari, "A normal form approach to approximate input-output linearization for maximum phase nonlinear SISO systems," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 41 (2), 305 (1996).
- [16] Kravaris, C., and P. Daoutidis, "Nonlinear state feedback control of second-order nonminimum-phase nonlinear systems," *Comp. Chem. Eng.*, 14 (4-5), 439 (1990).
- [17] Kanter, J. M., M. Soroush, and W. D. Seider, "Nonlinear controller design for input-constrained, multivariable processes," *Ind. Eng. Chem. Res.*, 41 (16), 3735 (2002).
- [18] Panjapornpon, C., M. Soroush, and W. D. Seider, "A model-based control method applicable to unstable, non-minimum-phase, nonlinear processes," *Proc. of ACC*, 4, 2921 (2004).
- [19] J. Kennedy and R. Eberhart, "Particle swarm optimization," in *Proc. IEEE Int. Conf. Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942-1947, 1995.
- [20] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New jersey, 2002.

- [21] L. S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V Gamkrelidze and E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc. New York. London. Sydney, 1965.
- [22] Autar K. Kaw, *An interactive e-book for illustrating Shooting Method of solving ordinary differential equations*, Holistic Numerical Methods Institute, College of Engineering, University of South Florida, Tampa, FL 33620-5350
- [23] Jean-Jacques E. Slotine, *Applied Nonlinear Control*, third ed., Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New jersey, 07632.
- [24] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, third ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1991.
- [25] I.C.Trelea, "The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection," *IPL: Inform. Process. Lett.*, vol. 85,2003.
- [26] R. Eberhart and Y. H. Shi, "Evolving artificial neural networks," in *Proc. Int. Conf. on Neural Networks and Brain*, 1998.
- [27] Lopez-Martinez, M. and Rubio, F.R., (2003) "Control of a Laboratory Helicopter Using Feedback Linearization". ECC'03: European Control Conference.
- [28] Fantoni J. and Lozano, R., (2002) "Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems". Springer-Verlag, London. ISBN1 85233423 1.
- [29] Hauser, J. Sashy, S. and Kokotovic, P., (1992) "Nonlinear Control Via Approximate Input-Output Linearization: The Ball and Beam Example". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 37, No.3
- [30] M.Lbpez-Martinez, J.M.Diaz, M.G.Ortega and F.R.Rubio Escuela, "Control of a Laboratory Helicopter using Switched 2-Step Feedback Linearization", *American Control Conference Boston, Massachusetts*, 2004.
- [31] C. Canudas de Wit, Bruno Siciliano and Georges Bastin, *Theory of Robot Control*, Springer, Great Britain, 1996.
- [32] **P. Mohajerin**, M. Karimi Ghartemani, "Optimal State-Feedback Controller Design of Nonlinear Feedback-Linearizable Systems" accepted for publication in the *IEEE Transactions on Automatic Control*, January 2008.
- [33] **P. Mohajerin**, M. Karimi Ghartemani, "An Optimal Controller Design Methodology for Input-Output Feedback Linearizable system" accepted for publication in the 17<sup>th</sup> *IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [34] N. Sadati, M. Zamani, and **P. Mohajerin**, "Optimum design of fractional order PID controller for MIMO and SISO systems using particle swarm optimization techniques" in *Proc. Of IEEE International Conf. on Mechatronics (ICM)*, Kumamoto, Japan, May 2007.

[۳۵] زمانی، مجید، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، آبان ۱۳۸۶.

## **Abstract**

Design is an important part of Control. Having different desires from controller yields to different designs; one of the criteria for design is optimization. In this project, first, the optimization problem is proposed with a cost function providing that the state and input signals behave optimally; then, an open-loop controller is designed for linear and nonlinear systems and an iterative method is proposed to reach a numerical solution.

Furthermore, this project focuses on closed-loop design controller and addresses the problem of optimal state-feedback design for a class of nonlinear systems. The method is applicable to all nonlinear systems which can be linearized using the method of state-feedback linearization. The alternative is to use linear optimization techniques for the linearized equations but then there is no guarantee that the original nonlinear system behaves optimally. We use feedback linearization technique to linearize the system and then design a state-feedback for the feedback-linearized system in such a way that it ensures optimal performance of the original nonlinear system. The proposed method can optimize any arbitrary smooth function of states and input. The method is successfully applied to control design of a flexible joint dynamic and the results are discussed. Several times of improvement is obtained in this example by employing the proposed method rather than the conventional linear quadratic regulator (LQR).

Finally, this project proposes a method to optimally design the control parameters in the Lyapunov-Based method which shares the same concept of control design with sliding mode approach as applied to the robot manipulators. Such parameters are conventionally selected to ensure stability of the closed-loop system. Optimal design of such parameters involves nonlinear functions which makes the problem challenging. We propose a step-by-step numerical algorithm to make an optimal selection for the parameters which makes some arbitrary cost function minimize in addition to the stability condition. The method is successfully applied to a two-link robot manipulator and the results are compared with those of a conventional controller.

**Keywords-** Optimization, Nonlinear Control, Feedback Linearization, Sliding mode



**Sharif University of Technology**  
**Electrical Engineering Department**

**M.Sc. Thesis**  
**Control Group**

**Title:**  
**An Optimal Control Design for**  
**Input-Affine Nonlinear Systems**

**By:**  
**Peyman Mohajerin Esfahani**

**Supervisors:**  
**Dr. Masoud Karimi**

**November 2007**